

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Publiée par M. HACHETTE.

III^e. Volume.

N^o. I^{er}. Janvier 1814.

S. I.

GÉOMÉTRIE.

Par M. BRIANCHON, capitaine d'artillerie.

Tulle, 23 mai 1813.

On a déjà fait connaître dans ce Recueil (tom. II, pag. 383-387), quelques-unes des conséquences auxquelles conduit le théorème donné par *Pascal*, sous le nom d'*hexagone mystique*. Voici de nouvelles remarques sur le même sujet.

Ayant une courbe plane, rapportée à deux axes quelconques, inclinons toutes ses ordonnées d'une même quantité angulaire, en les faisant pivoter, chacune, sur son pied, et dans le même sens; et cherchons les propriétés de la nouvelle courbe que détermine ce deuxième système d'ordonnées.

Pour cela, concevons qu'à tous les points du plan répondent des ordonnées qui suivent le même mouvement que celles de la courbe primitive, et désignons par $A, B, C, D, \dots$ ceux du premier système, et par $a, b, c, d, \dots$ leurs homologues dans le deuxième, respectivement. Puisque, par hypothèse, les points $A, B, C, D, \dots$ ont décrit des arcs de cercle semblables $Aa, Bb, Cc, Dd, \dots$ il est évident, 1^o. que deux droites homologues, comme AB, ab , se croisent sur la ligne même des abscisses;

en sorte que si A et B sont sur la courbe donnée, et qu'on les y fasse glisser l'un vers l'autre jusqu'à ce qu'ils se confondent en un seul point, les sécantes AB, ab , se changeront en deux tangentes correspondantes qui n'auront pas cessé de se couper sur l'axe des x ; 2°. que si R est le point de concours des droites AB, CD , et r celui de leurs homologues ab, cd , R et r seront deux points correspondans; 3°. que ceux d'entre les points $A, B, C, D, \dots R, \dots$ qui, dans le système primordial, étaient situés sur une même droite, conserveront la même disposition rectiligne dans le système déformé. Par exemple : soit pris, à volonté, six points A, B, C, D, E, F sur la première courbe, et, sur la deuxième, cherchons leurs homologues a, b, c, d, e, f ; les deux hexagones $ABCDEF, abcdef$, seront tels que, si, pour l'un d'eux, les trois points de concours des côtés opposés sont placés en ligne droite, l'autre jouira de la même propriété, c'est-à-dire que, si on a opéré sur une conique, la déformation indiquée n'en aura pas changé la nature, et les deux courbes seront du même ordre.

Etant donnée une courbe, traçons-en une deuxième qui coupe en parties proportionnelles toutes les ordonnées de la première; et, nommant toujours $A, B, C, D, \dots$ les points du premier système, et $a, b, c, d, \dots$ leurs homologues dans le deuxième, respectivement, nous trouverons dans les deux courbes actuelles des propriétés analogues à celles de la construction précédente. 1°. Les deux droites correspondantes AB, ab , iront se rencontrer sur la ligne des abscisses; et, de même, si l'on appelle *tangentes correspondantes* celles qui sont menées par deux points homologues, A, a , l'une touchant la première courbe en A , l'autre touchant la deuxième en a , deux pareilles tangentes se croiseront aussi sur l'axe des x ; 2°. le point d'intersection de deux lignes quelconques du système donné a pour homologue, dans le système déformé, le point d'intersection des deux lignes correspondantes; 3°. si la courbe primitive est une conique, la déformée sera de même nature, ainsi qu'on le démontre par la considération des hexagones inscrits. Cette dernière propriété, même est indépendante du parallélisme, que, jusqu'ici, nous avons supposé aux ordonnées, lesquelles pourraient être concourantes et réunies en faisceau; c'est-à-dire que : « Si d'un point, pris à volonté sur le plan d'une conique, on tire tant de droites qu'on voudra qui aillent se terminer à la courbe, et qu'on les divise toutes dans un même rapport, l'ensemble des points de division formera une nouvelle conique semblable à la première. »

On emploie souvent dans les arts graphiques les deux modes

de déformation de courbe que nous venons d'exposer. Le premier s'effectue en *balançant* ou faisant osciller toutes les ordonnées sur leurs bases; le deuxième, en augmentant ou diminuant proportionnellement toutes les ordonnées, qui, dans ces variations, demeurent constamment parallèles entr'elles. Dans l'un et l'autre cas, les tangentes se déplacent en tournant, chacune, autour d'un point fixe déterminé par l'axe des abscisses.

Appliquons ces considérations générales à un exemple remarquable : $ABXY$ étant (pl. 1, fig. 1) une circonférence de cercle rapportée à deux axes rectangulaires OA, OX , qui partent de son centre O ; augmentons proportionnellement toutes ses ordonnées, et nous obtiendrons l'ellipse concentrique $abXy$, dont les deux demi-axes sont Oa, OX . — a et b sont, respectivement, les homologues de A et B ; ainsi, les sécantes ab, AB se rencontreront, en H , sur l'axe des x , et les tangentes menées en b et B se couperont aussi sur cet axe OX en K ; enfin, les deux angles correspondans acb, ACB , ont leurs sommets c, C , situés sur la même ordonnée; partant, $ac = AC$.

Quoique la seule inspection de la figure apprenne que, d'après la théorie des lignes proportionnelles, $ac = AC, yd = YD$, nous allons cependant présenter ce résultat sous un nouveau jour en le rattachant à l'hexagone, ou plutôt à l'une des conséquences immédiates de l'hexagone de Pascal. La voici.

« Soient (fig. 2) deux triangles (ABC, abc) tels, qu'en joignant
 « leurs sommets deux à deux par des droites (Aa, Bb, Cc)
 « allant de l'un à l'autre, ces trois droites de construction con-
 « courent en un même point (S): si l'on combine deux à deux,
 « et dans le même ordre, les côtés opposés aux sommets ainsi
 « appariés, et qu'on les prolonge suffisamment, les trois points
 « d'intersection résultans (H, I, K) seront distribués sur une
 « même ligne droite ». — Réciproquement : « Lorsque deux
 « triangles (ABC, abc) sont tellement placés que, en com-
 « binant chacun des côtés du premier avec un de ceux du deuxième,
 « pour avoir leur point de concours, ces trois points de construc-
 « tion (H, I, K) se trouvent sur un même alignement : si, par
 « des droites, on joint deux à deux, et dans le même ordre,
 « les sommets opposés aux côtés ainsi appariés, ces droites, au
 « nombre de trois (Aa, Bb, Cc), se croiseront toutes en un
 « même point (S). » Cela posé, revenons à la figure 1^{re}, et
 menons AC et ac parallèlement à HK . Les points H, I, K étant
 ici en ligne droite; les deux triangles ABC, abc sont dans le
 cas de la figure 2, et par conséquent, les trois droites Aa, Bb, Cc ,
 sont concourantes; mais le point vers lequel elles tendent toutes, est
 situé à l'infini, puisque, par construction, Aa et Bb sont paral-

lèles entr'elles; donc Cc est aussi parallèle à l'axe des y , et, ainsi, $ac = AC$. On prouverait de la même manière que $yd = YD$.

Or, par les propriétés du cercle (fig. 1) : $BC = AC$, $BD = YD$, et le triangle COD , rectangle en O , donne $BC \times BD = \overline{OB}^2$, ou $AC \times YD = \overline{OB}^2 = \overline{OX}^2$, ou enfin, $ac \times yd = \overline{OX}^2$; équation qu'on traduit par cet énoncé : « Si on mène aux extrémités (a, y) du grand axe d'une ellipse des perpendiculaires à cet axe, le rectangle ($ac \times yd$) formé des parties de ces perpendiculaires, comprises entre ce même axe et une tangente quelconque à la courbe, sera une quantité constante ($\overline{OX}^2$), égale au carré du demi-petit axe. » Cette proposition est tirée des coniques d'Appollonius; et Lagrange s'en est servi dans sa *Théorie des Fonctions analytiques*.

Du centre de similitude de deux courbes semblables ; par M. MONGE.

Deux courbes quelconques du deuxième degré étant données par leurs équations,

$$A x^2 + B y^2 + 2C xy + 2D x + 2E y - 1 = 0,$$

$$A' x'^2 + B' y'^2 + 2C' x'y' + 2D' x' + 2E' y' - 1 = 0,$$

rapportées aux mêmes axes et à la même origine; pour que les deux courbes soient semblables entr'elles et semblablement placées, il faut que l'on ait

$$AC' - A'C = 0,$$

$$BC' - B'C = 0;$$

et par conséquent

$$AB' - A'B = 0.$$

Le centre de similitude directe et celui de similitude opposée seront sur la droite qui passe par les centres de figures des deux courbes proposées; cela posé, si l'on nomme α et β les coordonnées d'un de ces centres de similitudes, et m le quotient de la distance de ce centre de similitude au centre de la première des courbes, divisée par la distance des deux centres de figure, en faisant pour abréger

$$\begin{cases} 2CDE - AE^2 - BD^2 - (AB - C^2) = H, \\ 2CD'E' - AE'^2 - BD'^2 - \frac{C'}{C}(AB - C^2) = H', \end{cases}$$

on aura

$$C'H = C^2 H (m - 1)^2,$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ou} \quad m = 1 + \frac{c}{C'} \sqrt{\frac{H'}{H}}, \\
 & \text{et} \quad \alpha = \frac{(C'E - B'D)(m - 1) + CE' - BD'}{m(AB' - CC')}, \\
 & \quad \beta = \frac{(C'D - A'E)(m - 1) + CD' - AE'}{m(AB' - CC')}.
 \end{aligned}$$

Comme la quantité m a deux valeurs, suivant que l'on substituera l'une ou l'autre dans les valeurs de α et β , on aura les coordonnées des deux centres de similitude, dont l'un sera au-delà des deux centres de figures, et dont l'autre sera entre les deux.

(Voyez l'application de cette théorie du centre de similitude, dans le Traité des surfaces du second degré, vol. in-8°, pag. 194, édition 1813.)

Démonstration d'un théorème (*) de Trigonométrie sphérique ; par M. CORNELY (**).

Dans un triangle sphérique ABC (pl. 1, fig. 3), les trois arcs de grands cercles AO, BO', CO'' , abaissés des sommets A, B, C perpendiculairement sur les côtés opposés, se coupent en un même point I .

Cela revient à démontrer que les trois plans (fig. 4) SAO, SBO', SCO'' , menés par les trois arêtes SA, SB, SC , perpendiculairement aux faces respectivement opposées, se rencontrent suivant une même droite SI . En effet, concevons par le point c un plan perpendiculaire à l'arête SC , et soit abc , l'intersection de ce plan avec la pyramide; le plan de la face SBC est perpendiculaire au plan du triangle abc , et au plan SAO , ou Sao , mené par l'arête SA perpendiculairement à la face opposée à cette arête; donc il est perpendiculaire à l'intersection commune ao de ces deux plans; d'où il suit que les deux droites ao et bc , situées sur le plan abc , sont perpendiculaires entr'elles.

On prouve de la même manière que la droite bq' , intersection de la face ASC et du plan SBO' perpendiculaire à cette face, coupe à angle droit le côté ac du triangle abc . Les perpendiculaires abaissées des trois sommets a, b, c du triangle rectiligne abc , se

(*) L'auteur de ce théorème est M. de Stainville, qui l'a démontré par l'analyse, dans un Recueil de problèmes, qu'il a publié à Paris, en 1809, 1 vol. in-8°.

(**) Les auteurs des cinq articles suivans de géométrie, ont été admis à l'Ecole Polytechnique, en 1812.

coupent en un même point i ; d'où il suit que la droite cio'' est perpendiculaire au côté ab de ce triangle, et a cause de Sc perpendiculaire au plan abc , le plan du triangle Sco'' ou du triangle SCO'' est perpendiculaire au plan de la face ASB , opposée à l'arête SC ; donc les trois plans SAO , SBO' , SCO'' passent par la même droite Sil , et (fig. 3) les trois perpendiculaires AO , BO' , CO'' passent par le même point I .

Proposition de Géométrie, démontrée par M. CHASLES.

« Si par un point quelconque H (fig. 5, pl. 1), de l'une des diagonales d'un quadrilatère gauche ou plan $ABCD$, on mène deux droites dont l'une coupe les côtés AB , AD , et l'autre les côtés BC , CD , on aura

$$AI.BM.CK.DN = AN.DK.CM.BI.$$

En effet, les trois points H , I , N étant en ligne droite, on a dans le triangle ABD (Correspondance, 2^e. volume, page 258),

$$HB.AI.DN = HD.AN.BI.$$

On a de même dans le triangle BDC ,

$$HD.CK.BM = HB.CM.DK;$$

multipliant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$AI.BM.CK.DN = AN.DK.CM.BI.$$

Il est clair que si réciproquement cette équation a lieu, les deux droites NI , KM se couperont en un même point H de la diagonale BD prolongée. Donc les deux droites KI , MN seront toujours dans un même plan KHN , et se couperont en un point G .

Cette démonstration doit être ajoutée au théorème de M. Chasles, page 446 du tome 2 de la Correspondance.

Démonstration de quelques Théorèmes de géométrie; par M. GIORGINI.

Désignons par a , b , c les trois distances (fig. 6, pl. 1) OA , OB , OC , auxquelles un plan ABC coupe trois axes rectangulaires OX , OY , OZ ; l'équation de ce plan, par rapport à ces trois axes, sera

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z = 1. \quad (1)$$

Représentons de plus par (x) , (y) , (z) les angles que le plan BAC forme avec les trois axes des x , des y et des z , et par (x, y) , (x, z) , (y, z) les angles de ce même plan avec ceux des x , y ; x , z ; y , z ; les angles (z) , (y) , (x) seront respectivement les compléments des angles (x, y) , (x, z) , (y, z) ; de sorte que l'on aura

$$\sin (z) = \cos (x, y), \quad \sin (y) = \cos (x, z), \quad \sin (x) = \cos (y, z).$$

De l'origine des coordonnées O , abaissons sur le plan BAC une perpendiculaire $OH = p$, et joignons A, H ; le triangle OAH ; rectangle en H , donnera $OH = OA \sin OAH$, ou bien,

$$p = a \sin (x);$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1}{a} = \frac{\sin (x)}{p} = \frac{\cos (y, z)}{p};$$

$$\text{et par suite aussi} \quad \frac{1}{b} = \frac{\sin (y)}{p} = \frac{\cos (x, z)}{p},$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\sin (z)}{p} = \frac{\cos (x, y)}{p}.$$

L'équation du plan deviendra donc

$$x \sin (x) + y \sin (y) + z \sin (z) = p, \quad (2)$$

$$\text{ou bien} \quad x \cos (y, z) + y \cos (x, z) + z \cos (x, y) = p. \quad (3)$$

Cela posé, l'équation (2) démontre que la somme des trois perpendiculaires abaissées des trois projections d'un même point M du plan BAC , sur ce même plan, est égale à la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées, et par conséquent « que la somme des trois pyramides ayant pour base commune une figure tracée dans un plan, et pour sommets les trois projections de ce point sur les trois plans des coordonnées, est égale à une pyramide de même base, et qui aurait pour sommet l'origine des coordonnées. »

En effet de la projection P du point M sur le plan des x, y , abaissons, sur le plan BAC , la perpendiculaire PK , et joignons M, K ; le triangle MPK , rectangle en K , nous donnera, $PK = MP \sin PMK = z \sin (z)$; d'après cela, si l'on représente la perpendiculaire PK par π , et par π' , π'' les deux perpendiculaires abaissées des deux autres projections du point M , nous aurons

$$\pi = z \sin (z), \quad \pi' = y \sin (y), \quad \pi'' = x \sin (x),$$

et par suite d'après l'équation (2),

$$\pi + \pi' + \pi'' = p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quant à l'équation (3), elle démontre ce théorème de M. Monge :

« La somme des trois pyramides ayant pour sommet commun un point du plan, et pour base les trois projections d'une figure plane, est égale à la pyramide ayant son sommet à l'origine, et pour base cette figure. » En effet, le plan BAC étant le plan d'une figure dont l'aire serait représentée par F , multipliant l'équation (3) par $\frac{1}{3} F$, nous aurons

$$\frac{1}{3} x.F \cos(y, z) + \frac{1}{3} y.F \cos(x, z) + \frac{1}{3} z.F \cos(x, y) = \frac{1}{3} p.F :$$

or, $\frac{1}{3} p.F$ est la solidité de la pyramide ayant son sommet à l'origine, et pour base la figure plane; et les expressions $F \cos(y, z)$, $F \cos(x, z)$, $F \cos(x, y)$ représentant les trois projections de la figure F , les trois termes du premier membre représenteront les trois pyramides ayant pour sommet un point du plan, et pour base ces trois projections.

Nous allons voir tout-à-l'heure que ce dernier théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général, et que nous énoncerons après avoir expliqué ce que nous entendrons par projection de l'ordre n .

La figure F projetée sur les trois plans des coordonnées donnera les projections du premier ordre de cette figure; si de nouveau l'on projette les projections du premier ordre sur le plan de la figure, on aura trois nouvelles figures, qui, projetées sur les trois plans des coordonnées, donneront les projections du second ordre : on passera de même des projections du second ordre aux projections du troisième, ainsi de suite. D'après cette construction, il est clair que les projections de l'ordre n seront au nombre de 3^n , et je dis

« Que la pyramide ayant son sommet à l'origine et pour base une figure plane, est égale à la somme des 3^n pyramides ayant pour sommet commun un point du plan de la figure, et pour base les 3^n projections de l'ordre n de la figure. »

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord faire voir que si l'on projette sur le plan de la figure les projections d'un ordre quelconque, la somme des figures qui en résulteront sera toujours égale à la figure donnée. En effet, considérons d'abord les projections du premier ordre de la figure F : elles ont pour expression

$$F \cos(y, z), \quad F \cos(x, z), \quad F \cos(x, y),$$

et leurs projections f, f', f'' sur le plan de la figure seront :

$$f = F \cos^2(\gamma, z), \quad f' = F \cos^2(x, z), \quad f'' = F \cos^2(x, \gamma),$$

et par suite

$$f + f' + f'' = F(\cos^2(\gamma, z) + \cos^2(x, z) + \cos^2(x, \gamma));$$

et comme

$$\cos^2(\gamma, z) + \cos^2(x, z) + \cos^2(x, \gamma) = 1,$$

il s'en suivra

$$f + f' + f'' = F,$$

ce qui démontre le dernier principe énoncé pour les projections du premier ordre. Pour rendre ce principe tout-à-fait général, il suffira donc de faire voir qu'étant démontré pour les projections de l'ordre $n-1$, il l'est aussi pour les projections de l'ordre n ; or, représentons par ϕ, ϕ', ϕ'' , etc., les projections sur le plan de la figure des projections de l'ordre $n-1$; à chacune de ces figures répondront trois projections de l'ordre n , qui pourront être regardées comme leurs projections du premier ordre, et qui, d'après ce que nous venons de démontrer, donneront chacune sur le plan de la figure trois projections dont la somme lui sera égale. Si donc à la figure ϕ répondent les trois ψ, ψ', ψ'' ; à la figure ϕ' , les trois $\psi_1, \psi_1', \psi_1''$, etc., etc., il s'en suivra que

$$\phi + \phi' + \text{etc.} = \psi + \psi' + \psi'' + \psi_1 + \psi_1' + \psi_1'' + \text{etc.};$$

or, par hypothèse, $\phi + \phi' + \text{etc.} = F$;

donc aussi $\psi + \psi' + \psi'' + \text{etc.} = F$,

ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé, puisqu'il est généralement démontré que ϕ, ϕ', ϕ'' , etc., étant les projections sur le plan de la figure, de ses projections de l'ordre $n-1$, qui sont évidemment au nombre de 3^{n-1} , on a

$$\phi + \phi' + \text{etc.} = F;$$

il en résulte que la pyramide ayant son sommet à l'origine, et pour base la figure F , est égale à la somme des pyramides ayant même sommet, et pour base les figures ϕ, ϕ' , etc.; or, chacune de ces dernières est égale à la somme de trois pyramides ayant pour sommet un point du plan, et pour base ses trois projections du premier ordre, qui sont trois projections de l'ordre n de la figure, il s'ensuivra que la somme de toutes ces pyramides, ou la pyramide, ayant pour sommet l'origine et pour base la figure F , sera égale à la somme de toutes les pyramides ayant leur sommet en un point du plan de la figure, et pour base ses projections de l'ordre n , ce qu'il s'agissait de démontrer.

Solution d'un problème de Géométrie ; par M. OLIVIER,

M. Hachette a communiqué à la Société philomatique (séance du 22 mai 1813) une solution synthétique de ce problème : *Trois circonférences quelconques de grands ou petits cercles , étant tracées sur la surface d'une sphère , trouver une quatrième circonférence tangente aux trois premières.* Ce problème , dont M. Carnot a donné une solution analytique dans sa Géométrie de position , page 415 , avait été proposé aux élèves de l'Ecole polytechnique ; M. Olivier l'a résolu très-élégamment *en menant , par un point donné , un plan tangent à un cône oblique à base circulaire.* Les trois cercles étant donnés , M. Olivier fait passer par ces cercles pris deux à deux , trois cônes obliques (voyez Supplément de la Géométrie descriptive , par M. Hachette , pag. 55) , et il ne considère d'abord que les trois cônes dont les sommets sont au-delà des plans des cercles. Il remarque que le plan tangent à deux de ces cônes , est nécessairement tangent au troisième , et qu'il coupe la sphère suivant un quatrième cercle tangent aux trois cercles donnés. Ayant donc déterminé le premier cône , et le sommet du second , on mène par ce sommet deux plans tangens au premier cône , et chacun de ces plans contient un des cercles cherchés ; ces deux plans se coupent suivant une droite qui contient les sommets des trois cônes.

Les sommets des cônes obliques qui joignent trois cercles d'une sphère deux à deux , sont distribués sur quatre droites situées dans le même plan. Par chacune de ces droites , on peut mener deux plans tangens à l'un quelconque des trois cônes qui ont leurs sommets sur cette droite ; d'où il suit que trois cercles d'une sphère peuvent , en général , être touchés par un quatrième cercle de cette sphère , de huit manières différentes.

Etant données trois courbes planes d'une surface du second degré , on détermine , par des considérations semblables , la quatrième courbe plane qui les touche. En effet , il est évident que lorsque deux surfaces du second degré se coupent , la courbe d'intersection est , en général , composée de deux branches ; et si l'une de ces branches est plane , l'autre branche l'est nécessairement. D'où il suit que , par deux courbes planes quelconques d'une surface du second degré , on peut toujours mener une surface conique du second degré. Ayant déterminé les sommets des cônes qui passent par les trois courbes planes données , on achève la solution comme pour les sphères , en menant des plans tangens à ces cônes.

*Propositions relatives aux Courbes et aux Surfaces
du second degré; par M. CHASLES.*

1°. « Si, par un point A (fig. 1, pl. 2), pris dans le plan d'une section conique, on mène deux droites AB, AD , puis les quatre tangentes RB, RC, TD, TE , et les quatre droites SEC, SDB, EIB, CID , les quatre points R, S, T, I seront en ligne droite. »

Toute section conique pouvant être regardée comme la perspective d'un cercle, il suffit de démontrer ce théorème pour le cercle. Nous allons donc faire voir que, dans un cercle, les trois points (fig. 2) R, S, I sont en ligne droite; la même démonstration aurait lieu pour les trois points T, S, I .

$$\text{Le triangle } \left\{ \begin{array}{l} xSB \\ xCR \\ SBE \\ CEI \\ CIB \end{array} \right\} \text{ donne } \left\{ \begin{array}{l} SB : Sx :: \sin SxB : \sin SBx, \\ Rx : RC :: \sin RCx : \sin CxR, \\ SE : SB :: \sin SBE : \sin SEB, \\ IC : IE :: \sin CEI : \sin ECI, \\ IB : IC :: \sin ICB : \sin IBC. \end{array} \right.$$

Multipliant ces proportions terme à terme, et observant que $\sin SxB = \sin CxR$, $\sin SBx = \sin ICB$, $\sin RCx = \sin IBC$, $\sin SBE = \sin ECI$, $\sin SEB = \sin CEI$, et $RC = RB$,

on aura $Rx \cdot SE \cdot IB = RB \cdot EI \cdot Sx$;

d'où l'on conclut, en considérant le triangle xEB , que les trois points R, S, I sont en ligne droite. Ce qu'il fallait prouver.

2°. Dans le quadrilatère $BCED$ (fig. 1), on a

$$AC : AB :: oC : oB; \quad AE : AD :: KE : KD,$$

(Théorie des transversales de M. Carnot, théorème 6.)

Les points fixes o, R déterminent la droite oR ; d'où résulte ce théorème :

« Si d'un point A , situé dans le plan d'une section conique, on mène des sécantes $AC, AE, \dots$; les tangentes aux points $B, C; D, E; \dots$ se coupent deux à deux sur une même droite; les droites $BD, CE, \dots$ ainsi que $CD, BE, \dots$ se coupent aussi deux à deux sur cette même droite. »

3°. « Si d'un point A on mène des droites $AC, \dots$ et qu'on prenne des points o , tels que $\frac{AC}{AB} = \frac{oC}{oB}$, les points o seront sur une droite ».

Cette droite sur laquelle se trouvent les points R, S, T, I , coupe la courbe en deux points m, n , et Am, An sont évidemment tangentes à la courbe. Par conséquent la droite Rn est parallèle au conjugué du diamètre AY . On a

$$Ap : Aq :: Zp : Zq ;$$

d'où l'on déduit

$$YA : Yq :: Yq : YZ, \quad YZ = \frac{Yq^2}{AY},$$

Y étant le centre de la surface (*).

4°. « Si on prolonge les tangentes RC, RB jusqu'à ce qu'elles rencontrent la tangente An en F et G , il est clair que les droites FB, GC se couperont sur RS ; d'où l'on voit que :

« Quand les trois côtés d'un triangle touchent une section conique, les trois droites qui unissent les sommets avec les trois points de tangence se coupent en un même point. »

La tangente en m et les droites CB, FG se rencontrent en un même point A , la tangente en B' et les droites Cn, RG se rencontreraient aussi en un même point; il en serait de même de la tangente en C' et des deux droites Bn, RF ; ces trois points seraient sur une ligne droite parallèle au conjugué du diamètre passant par le point l .

Puisque les trois droites Rn, FB, GC se coupent en un même point l , on a

$$RC.Fn.GB = RB.Cn.FC.$$

Ce théorème étant démontré pour un polygone, il est facile de le prouver pour un polygone d'un côté de plus.

Car soit (fig. 4) un polygone quelconque $ABCDE$; je prolonge EA, BC jusqu'en m : on aura, par hypothèse, dans le polygone $mEDC$,

$$mL.EH.DG.CK = mK.CG.DH.EL :$$

(*) Si $A'Y$ (fig. 3) est le conjugué de AY , on aura semblablement $YZ' = \frac{Y\pi^2}{YA'}$.

Supposons que les deux tangentes Am, An soient perpendiculaires entr'elles, on aura $AZ = Zm$, et par suite $AY = YA'$. Ainsi $YZ = \frac{Yq^2}{AY}$, $YZ' = \frac{Y\pi^2}{YA'}$:

or on a entre $YZ, YZ', Yq, Y\pi$, la relation $\overline{Yq}^2 \cdot \overline{YZ'}^2 + \overline{Y\pi}^2 \cdot \overline{YZ}^2 = \overline{Yq}^2 \cdot \overline{Y\pi}^2$; d'où l'on déduit $\overline{AY}^2 = \overline{Yp}^2 + \overline{Y\pi}^2$. Le second membre est une quantité constante. Ainsi le sommet A des deux tangentes se meut sur un cercle.

or, dans le triangle mAB , on a

$$mK.BI.AL = mL.AI.BK;$$

multipliant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$AL.EH.DG.CK.BI = AI.BK.CG.DH.EL.$$

5°. « La courbe de contact d'un cône et d'une surface du second degré est plane. »

En effet, par le sommet R (fig. 1) du cône tangent, je mène une droite quelconque qui coupe la surface en deux points m, n , auxquels je conçois les deux plans tangens. Par la droite Rn , je conduis un plan qui coupe la surface suivant la courbe $nCmB$, le cône suivant deux arêtes RC, RB tangentes à la courbe, et les plans tangens suivant deux droites Am, An ; la droite BC passera par le point A (4°); de plus, elle coupe Rn en un point o , et on aura $\frac{Rn}{Rm} = \frac{on}{om}$. Ainsi la droite BC passe par un point fixe o , et par la droite intersection des deux plans tangens en m et n , laquelle est aussi fixe; donc cette droite BC est toujours dans le même plan. Donc, etc.

Il résulte de cette démonstration que si, d'un point fixe, on mène des droites qui coupent une surface du second degré, le lieu géométrique de la droite intersection des plans tangens aux points d'intersection d'une même droite, sera un plan.

Il est évident que, par une courbe plane tracée sur une surface du second degré, on peut mener un cône tangent; car si, par trois points de cette courbe on mène trois plans tangens, et qu'on conçoive un cône circonscrit à la surface, et ayant son point d'intersection pour sommet, il touchera la surface suivant une courbe plane qui se confondra avec la courbe donnée, puisque ces deux courbes ont trois points communs.

6°. « Si l'une des courbes d'intersection d'un cône et d'une surface du second degré est plane, l'autre le sera aussi. »

En effet, suivant la courbe plane qui se projette en CB (fig. 1), je mène un cône tangent à la surface; je joins par une droite le sommet R de ce cône, et le sommet S du cône donné; cette droite rencontre la surface en deux points m, n , auxquels je mène des plans tangens, ils se coupent suivant une droite située dans le plan CB (5°); par la droite RS , je mène un plan que je suppose être celui de la figure; il coupe le cône donné suivant deux arêtes SC, SB , et les plans tangens suivant deux droites mA, nA . Les droites CD, BE se couperont en un point I de RS , et on aura

$\frac{Sm}{Sn} = \frac{Im}{In}$ (3°), la droite ED passera par le point A ; de plus,

on aura $\frac{So}{Sk} = \frac{Io}{Ik}$. Or, le point o et le point I sont fixes, le point k l'est donc aussi. Ainsi la droite ED passe toujours par un même point k , et une même droite intersection des deux plans tangens en m et n , et par conséquent elle décrit un plan. Donc, etc.

Outre le cône dont le sommet est en S , il y en a un autre dont le point I est le sommet.

7°. « Par deux courbes planes tracées sur une surface du second degré, on peut faire passer deux cônes. »

Par la droite intersection des plans des deux courbes, je conçois deux plans tangens à la surface, et je joins les deux points de tangence par une droite mn (fig. 1). Par cette droite, je mène un plan que je suppose être celui de la figure; il coupe les plans tangens suivant deux droites Am , An , et les plans des deux courbes suivant deux droites AC , AE , les droites CE , BD se rencontrent en S sur mn prolongée. Si, par le point S , on mène un cône qui ait la courbe BC pour base, il coupera la surface suivant une autre courbe plane, dont le plan passera par les points E , D , et par l'intersection des deux plans tangens en m et n . Donc cette courbe sera la même que la seconde courbe donnée. Ainsi le point S est le sommet d'un cône passant par les deux courbes données. Par la même raison, le point I est le sommet d'un second cône. D'ailleurs, les sommets S et I sont liés entre eux par la relation $\frac{So}{Sk} = \frac{Io}{Ik}$.

Les points R , T étant les sommets des cônes tangens, suivant les courbes CB , DE , on voit que les six points R , T , S , I , m , n sont en ligne droite.

8°. « L'intersection de deux cônes tangens à une surface du second degré, est une courbe plane dont le plan passe par l'intersection de ceux des courbes de contact. »

Car la droite uv passe par le point fixe I et par un point A de la droite intersection des deux plans de contact.

En combinant deux à deux les trois courbes BC , ED , uv , on voit qu'on peut mener six cônes dont chacun passe par deux de ces courbes. Les sommets de ces six cônes seront sur une même droite.

On déduit de ce qui précède que :

Si, d'un point fixe A (fig. 1), on mène une infinité de droites qui coupent une surface du second degré, et si, sur chacune de ces

droites , on prend un point I , tel que les distances de ce point aux points où la droite coupe la surface , soient proportionnelles aux distances du point fixe aux mêmes points , le point I engendre un plan.

Si , par un point fixe A , on mène une infinité de droites AC , AE , ... et qu'on joigne par des droites CD , BE , ou CE , BD , les points d'intersection de deux quelconques de ces droites avec une surface du second degré , les points I , S engendreront un plan. Ce plan sera le même que le précédent.

Si un cône est tangent à une surface du second degré , et que le plan de contact passe par une droite fixe , le sommet du cône se mouvra sur une droite.

Si le plan de la courbe d'intersection de deux cônes tangens à une surface du second degré passe toujours par une même droite , les sommets des deux cônes engendreront une droite.

Si , par deux sections planes d'une surface du second degré , on fait passer deux cônes , leurs sommets engendreront une droite , quand les plans des deux courbes passeront par une droite fixe.

Si , à une droite fixe , on substitue un point fixe , le lieu géométrique dessommets des différens cônes que nous venons de considérer , sera un plan.

Si , par un point , on mène un cône tangent à une surface du second degré , et un autre cône quelconque qui coupe la surface suivant deux courbes planes semblables à la courbe de contact , et que , par ces deux courbes , on fasse passer un second cône , son sommet sera en un point fixe sur le diamètre qui passe par le point donné.

9°. Soient (fig. 5) A , C les sommets de deux cônes tangens à une surface du second degré ; B , D deux points de leur courbe d'intersection ; m , q , n , p les points où les arêtes AB , AD , CB , CD touchent la surface , les trois droites mq , np , BD se couperont en un même point I de BD , par conséquent on aura

$$Am.Bn.Cp.Dq = Aq.Dp.Cn.Bm.$$

Cette équation a lieu , quel que soit le quadrilatère $ABCD$.

Il est facile de l'étendre à un polygone quelconque. Donc ,

« Si tous les côtés d'un polygone plan ou gauche touchent une surface du second degré , on aura deux segmens sur chaque côté , ou sur son prolongement ; le produit de tous ces segmens , qui n'ont pas d'extrémité commune , est égal au produit de tous les autres. »

10°. « Une courbe plane quelconque est tracée sur une surface

« du second degré ; on la projette sur un plan par un cône ayant son sommet en un point de la surface pour lequel le plan tangent est parallèle au plan de projection , la projection de cette courbe sera une courbe semblable à celle qu'on obtiendrait en coupant la surface par un plan parallèle à celui de projection. »

En effet, soient C, C' , deux courbes qu'on obtient en coupant la surface par deux plans parallèles à celui de projection. Par la courbe C' et la courbe plane A tracée sur la surface, je fais passer un cône, il rencontrera le plan de projection suivant une courbe B semblable à la courbe C' , et par conséquent à la courbe C . Or, le plan sécant qui donne la courbe C' , se mouvant parallèlement à lui-même, et s'approchant indéfiniment du plan tangent, la courbe B variera ; mais sera toujours semblable à la courbe C . Donc, à la limite, c'est-à-dire au point où le plan sécant devient tangent, la courbe B est encore semblable à la courbe C .

Ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de là que, dans les paraboloides il existe un plan sur lequel toutes les sections planes se projettent orthogonalement, suivant des courbes semblables. Ce sont des ellipses ou des hyperboles, suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique (*).

P R O B L È M E.

« Mener sur une surface du second degré une courbe plane, tangente à trois autres courbes planes tracées sur cette surface. »

Par les trois courbes, on menera trois cônes qui aient pour sommet commun un point de la surface, tel qu'un plan sécant parallèle au plan tangent en ce point, donne un cercle pour section. On coupera les trois cônes par un plan parallèle à ce plan tangent ; on aura pour sections, trois cercles auxquels on menera un quatrième cercle tangent. On considérera ce cercle comme la base d'un cône ayant même sommet que les trois autres. Il est évident que ce cône tangent à ces trois-ci, coupera la surface, suivant une courbe plane tangente aux trois courbes proposées.

Ce problème admet huit solutions, puisque trois cercles tracés sur un plan peuvent être touchés par un quatrième cercle de huit manières différentes.

On résoudra semblablement, par rapport aux contacts des courbes planes, tracées sur une surface du second degré, les problèmes relatifs aux contacts des courbes tracés sur un plan.

(*) Cette proposition a été démontrée pag. 330, vol. 2 de la Correspondance.

Soient A, B, C trois courbes planes tracées sur une surface du second degré : par A et B , on pourra faire passer deux cônes, l'un extérieur, que je représente par (ab) , l'autre intérieur $(a'b')$. De même A et C donneront deux cônes (ac) , $(a'c')$, B et C , deux autres cônes (bc) , $(b'c')$. Soient $\gamma, \gamma', \beta, \beta', \alpha, \alpha'$, les sommets respectifs de ces six cônes. Chacune des huit courbes qui touchent les trois courbes A, B, C est dans un plan tangent à trois des six cônes, et ces trois cônes seront tous les trois extérieurs, ou deux seront intérieurs, et le troisième extérieur ; ce qui donne les quatre systèmes

$$\begin{array}{lll} (ab), & (ac), & (bc), \\ (ab), & (a'c'), & (b'c'), \\ (a'b'), & (a'c'), & (bc), \\ (a'b'), & (ac), & (b'c'), \end{array}$$

à chacun desquels correspondent deux courbes planes tangentes aux trois courbes A, B, C . Les sommets des trois cônes de chacun de ces systèmes se trouvent donc sur l'intersection de deux plans, et par conséquent en ligne droite. Ainsi

$$\text{les points} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma, \beta, \alpha, \\ \gamma, \beta', \alpha', \\ \gamma', \beta, \alpha, \\ \gamma', \beta', \alpha'. \end{array} \right\} \text{ sont en ligne droite,}$$

Ces propriétés des surfaces du second degré ont lieu pour les courbes du même ordre, dans lesquelles on a tracé trois cordes.

Pour s'en convaincre, il suffit de concevoir que la courbe engendre une surface de révolution, en tournant autour d'un de ses axes principaux, et que les trois cordes représentent les projections de trois courbes planes tracées sur la surface, et dont les plans soient perpendiculaires à celui de la figure. Les sommets des six cônes correspondans à ces trois courbes, seront évidemment dans le plan de cette figure, et trois à trois en ligne droite.

Propriété () des sections coniques.*

Une droite se meut parallèlement à elle-même, en touchant une suite d'ellipses qui ont mêmes foyers ; le lieu des points de contact des ellipses et de la droite mobile, est une hyperbole équilatère, concentrique aux ellipses, et qui passe par les foyers de ces courbes.

(*) Communiquée par M. Frégier, admis à l'Ecole polytechnique, en 1813.

*Formule de trigonométrie sphérique ; par M. PARADIS
DE MOCRIF, professeur de l'Ecole impériale de navigation de Bayonne.*

Nommant a, b, c les trois côtés d'un triangle sphérique, A, B, C les angles respectivement opposés à ces côtés, la formule connue :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \cos c = & \frac{1}{2} \cos(a-b) + \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{4} \cos(C+(a-b)) + \frac{1}{4} \cos(C-(a-b)) \\ & - \frac{1}{4} \cos(C+(a+b)) - \frac{1}{4} \cos(C-(a+b)). \end{aligned}$$

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

De la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre, et de la surface hélicoïde des filets de la vis triangulaire ; par M. HACHETTE.

La surface des filets d'une vis triangulaire, est engendrée par une droite, qui a pour directrices, une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire, et l'axe de ce cylindre ; cet axe qui est aussi l'axe de la vis, est coupé par la droite mobile sous un angle donné, qui est constant pour toutes les positions de cette droite. Nous allons considérer sur cette surface les hélices décrites par les divers points de la droite génératrice, et nous déterminerons sur chacune de ces hélices, le point où la surface hélicoïde est touchée par un plan mené parallèlement à une droite donnée, ou par un point donné hors la surface.

Remarquons 1°. que tous les plans P tangens à la surface, menés par les points d'une même hélice, font avec l'axe de la vis le même angle, puisque chacun d'eux passe par une tangente à l'hélice et par la droite génératrice ; 2°. que la projection orthogonale de l'axe de la vis sur l'un quelconque des plans P tangens à la surface hélicoïde, et la droite génératrice contenue dans ce même plan, comprennent un angle A , qui ne varie pas, quelque soit le plan tangent. Si, par un point quelconque de l'axe, on conçoit une suite

de plans parallèles aux plans menés tangentielllement à la surface par les points d'une même hélice, l'enveloppée de ces plans sera un cône droit, dont on aura facilement la base circulaire sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Supposons ce cône droit déterminé; on mènera un plan tangent à ce cône parallèlement à une droite donnée, ou par un point donné, et on déterminera l'arête de contact. Cette arête sera la projection orthogonale de l'axe de la vis sur un plan parallèle au plan tangent cherché; donc si, par le sommet du cône droit, on mène dans ce plan parallèle, une droite qui fasse avec l'arête de contact du cône droit, un angle égal à l'angle donné, qu'on a désigné précédemment par la lettre A , cette droite sera la parallèle à la génératrice qui passe par le point de l'hélice, pour lequel le plan tangent à la surface hélicoïde est parallèle à une droite donnée, ou passe par un point donné; donc la projection de cette parallèle à la génératrice, sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, coupera le cercle projection de l'hélice, en un point qui déterminera sur cette hélice, les points de contact de la surface hélicoïde, et des plans parallèles à une droite donnée, ou menés par un point donné.

La suite des points déterminés de la même manière appartient à la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre, et de la surface hélicoïde des filets de la vis. Dans le cas où cette surface sera touchée par un cylindre, la projection de la courbe de contact sur le plan perpendiculaire à l'axe de la vis, sera à branches fermées ou à branches infinies, selon que l'angle de l'axe de la vis et de la droite génératrice de la surface hélicoïde, sera plus grand ou plus petit que l'angle formé par l'axe de la vis, et la droite génératrice du cylindre circonscrit à la surface hélicoïde. Lorsque ces deux angles seront égaux, le nombre des branches infinies sera réduit à moitié. Pour voir la raison de cette règle, il faut observer qu'à chaque point de la génératrice de la surface hélicoïde, correspondent une hélice, et une suite de plans tangens à la surface, qui passent par les points de l'hélice, et qui font avec l'axe de la vis le même angle; pour le point de la génératrice à une distance infinie de l'axe de la vis, et pour tous les points de l'hélice infinie qui passe par ce point, l'angle constant des plans tangens P' menés par les points de l'hélice infinie, avec l'axe de la vis, est égal à l'angle de cet axe et de la génératrice de la surface hélicoïde. La condition pour que l'un des plans tangens P' soit parallèle à une droite donnée D , est la même que celle qui doit être satisfaite, pour qu'un cylindre engendré par une droite parallèle à la droite D , touche la surface hélicoïde suivant une courbe, dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, soit une autre courbe à branches infinies.

Application de cette méthode au dessin de la vis triangulaire.

Nous avons déjà résolu cette question (voyez la Correspondance, tome 2 , pages 69 et 447) de déterminer sur la surface des filets d'une vis triangulaire, la ligne de séparation d'ombre et de lumière dans l'hypothèse des rayons de lumière parallèles entre eux , mais la méthode précédente est préférable, parce qu'elle donne directement les points de cette ligne sur l'hélice arête des surfaces supérieure et inférieure des filets, sur les hélices intersections de ces surfaces et du cylindre noyau de la vis, et sur des hélices intermédiaires, en tel nombre qu'il est nécessaire pour tracer la courbe avec exactitude.

Cette construction apprend d'ailleurs quelle doit être l'inclinaison du rayon de lumière, pour que la projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, soit une courbe fermée ou à branches infinies.

Quand à l'ombre portée, par une courbe quelconque, sur la surface hélicoïde des filets, on la construira de la manière la plus simple en coupant d'abord les surfaces supérieure et inférieure des filets par un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, et en remarquant que cette courbe est constante de forme. L'ayant tracée, on découpera une cherche, ou un patron suivant cette courbe. On considérera la ligne qui porte ombre sur la surface hélicoïde comme la base d'un cylindre, dont les arêtes sont parallèles au rayon de lumière, et on cherchera l'intersection de ce cylindre et de la surface hélicoïde, en coupant ces deux surfaces par une suite de plans perpendiculaires à l'axe de la vis, et en projetant, par un système des droites parallèles au rayon de lumière, toutes les sections sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis.

On construira de cette manière tous les points du contour de l'ombre portée sur la surface hélicoïde, au moyen de deux courbes planes, l'une fixe et l'autre mobile, cette dernière courbe étant une section de la surface hélicoïde, qui varie de position, et dont la forme est constante.

De la sphère qui touche quatre sphères données
(suite de l'article, page 425-429 du 2^e. volume);
par M. HACHETTE.

Conservant les dénominations précédentes de l'article cité, soient de plus a''' , b''' , c''' les coordonnées du centre de la quatrième sphère donnée, et r''' son rayon, supposons que la sphère du rayon ρ , dont le centre a pour coordonnées α , β , γ , soit tangente aux quatre sphères données; x , y , z étant les coordonnées du point où la sphère du rayon ρ touche la première sphère, on a l'équation (6) :

$$\frac{x}{a} = \frac{r}{r + \rho}; \quad (6)$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{x(\rho + r)}{r}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b) (pag. 427, tom. 2) :

$$\rho = \frac{a' r (2x - a') - r(r^2 - r'^2)}{2(r(r - r') - 2a'x)}. \quad (G)$$

Par l'axe des x qui contient les centres des deux premières sphères données, et par le centre de la quatrième sphère, concevons un plan, et faisons tourner ce plan autour de l'axe des x , jusqu'à ce qu'il soit confondu avec le plan des xy ; rapportant les deux premières sphères données, ainsi que la quatrième sphère, à ce nouveau plan, en conservant l'origine des coordonnées et l'axe des x , les coordonnées du centre de la quatrième sphère seront a''' , et $\sqrt{b'''^2 + c'''^2}$. Faisant pour abréger $\sqrt{b'''^2 + c'''^2} = B$, et désignant par y' les ordonnées perpendiculaires à l'axe des x , on aura pour l'équation du plan du petit cercle, lieu de tous les points de contact de ces trois sphères, et d'une sphère mobile qui les touche;

$$x \left\{ \begin{array}{l} (a'^2 - (r - r')^2)(a'''(r - r') - a'(r - r''')) \\ - a'(r - r')(a'''^2 + B^2 + r^2 - r'''^2) \\ - a'(r - r''')(r'^2 - r^2 - a^2), \\ + b^2 y'(r - r')(a'^2 - (r - r')^2) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (F')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - r(r - r')^2(a'''^2 + B^2 + r^2 - r'''^2) \\ - r(r - r')(r - r''')(a^2 + r^2 - r'^2). \end{array} \right\}$$

On obtient cette équation en changeant, dans l'équation (F) (pag. 428, tom. II), r'' en r''' , et b'' en B .

Faisant successivement dans l'équation (F') $y' = 0$, $x = 0$, on aura les valeurs X et Y de x et de y' , qui correspondent à $y' = 0$, et à $x = 0$; la droite, dont l'équation est (F'), coupera l'axe des x et l'axe des y' en deux points, distans des coordonnées de l'origine des quantités X et Y .

Remettant l'axe des y' et la portion Y de cet axe à sa véritable place sur le plan des yz , et élevant une perpendiculaire sur cet axe par l'extrémité de Y , cette perpendiculaire sera sur le plan des yz la trace du plan du petit cercle, lieu des points de contact des trois sphères qui ont pour rayons r , r' , r''' , et de la sphère mobile qui les touche. Cette trace coupe l'axe des y et l'axe des z en deux points, dont les coordonnées sont $\frac{BY}{b''}$ et $\frac{BY}{c''}$; en sorte que le plan du petit cercle coupe les trois axes des x , des y , z en trois points distans de l'origine des coordonnées des quantités

$$X, \quad \frac{BY}{b''}, \quad \frac{BY}{c''};$$

d'où il suit que l'équation de ce plan est :

$$\frac{x}{X} + \frac{b''y}{BY} + \frac{c''z}{BY} = 1 : \quad (F'')$$

x , y , z étant les coordonnées du point de contact de la première sphère du rayon r , et de la cinquième sphère du rayon ρ , on a pour ce point :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Des équations (G), (F''), et de l'équation (F) (pag. 428, tom. II), linéaires en x , y , z , ρ , on tirera la valeur de ρ de l'équation du second degré ($x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$). Mettant successivement dans les quatre systèmes d'équations (F), (F'') la différence $r - r'''$ des rayons r , r''' , ou leur somme $r + r'''$, on parviendra à huit équations du second degré, d'où l'on tirera les seize valeurs du rayon ρ de la sphère, qui touche les quatre sphères données des rayons r , r' , r'' , r''' . Quand aux coordonnées α , β , γ , du centre de cette sphère tangente, on tirera leurs valeurs des équations (6) :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{r}{r + \rho}.$$

Note sur une difficulté relative à la rectification des courbes ; par M. POISSON.

Si l'on représente par x et y les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe plane, et par s l'arc de la même courbe qui se termine en ce point, on a, comme on sait,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 ;$$

et le problème de la rectification des courbes, considéré sous le point de vue le plus général, consiste à intégrer cette équation différentielle à trois variables. Elle est de l'espèce de celles qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire, que l'on ne peut pas y satisfaire par une seule équation en x , y et z , qui laisserait deux de ces variables indépendantes entre elles. Son intégrale générale, telle que M. Monge et M. Lagrange l'ont trouvée, est représentée par le système de trois équations, savoir :

$$x = \varphi' \alpha . \sin \alpha + \varphi'' \alpha . \cos \alpha ,$$

$$y = \varphi' \alpha . \cos \alpha - \varphi'' \alpha . \sin \alpha ,$$

$$s = \varphi \alpha + \varphi' \alpha ,$$

α étant une nouvelle indéterminée, et $\varphi \alpha$ désignant une fonction arbitraire de cette quantité. On peut vérifier, en effet, que l'équation donnée est satisfaite par ces valeurs de x , y , s ; car on en tire

$$dx = + \cos \alpha (\varphi' \alpha + \varphi''' \alpha) d\alpha ,$$

$$dy = - \sin \alpha (\varphi' \alpha + \varphi''' \alpha) d\alpha ,$$

$$ds = (\varphi' \alpha + \varphi''' \alpha) d\alpha ,$$

et par conséquent $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Telle est donc, sous forme finie, la relation qui existe dans toutes les courbes possibles entre l'arc et les coordonnées. Lorsque la fonction $\varphi \alpha$ sera donnée, on aura l'équation de la courbe en éliminant α entre les valeurs de x et de y , et l'on obtiendra l'arc en fonction de l'une des deux coordonnées, en éliminant α entre la valeur de s et celle de cette coordonnée. Mais si, au contraire, l'équation de la courbe est donnée en x et y , on y substituera les valeurs précédentes de ces variables, et il en résultera une équation différentielle du second ordre par rapport à $\varphi \alpha$, qui devra servir à déterminer cette fonction. Or, il se présente ici une difficulté qu'il est bon de remarquer : cette équation différentielle étant du second ordre, la valeur de $\varphi \alpha$, tirée de son intégrale, contiendra

deux constantes arbitraires; il semble donc que la valeur de s ; savoir : $s = \phi a + \phi' a$, devra aussi renfermer ces deux constantes, ce qui serait absurde, puisque l'arc indéfini d'une courbe ne comporte, dans son expression, qu'une seule constante arbitraire, dépendante du point fixe d'où il est compté.

Pour éclaircir cette difficulté, désignons par $u = 0$ l'équation de la courbe; u étant une fonction donnée de x et y . Si l'on y met pour ces coordonnées leurs valeurs, on ne voit pas d'abord comment l'équation différentielle qui en résultera, pourra s'intégrer en général, et quelle que soit la forme de la fonction u ; mais heureusement elle est du genre de celles qui s'intègrent en commençant par les différentier. En effet, d'après les valeurs précédentes de dx et dy , on aura

$$du = \left(\frac{du}{dx} \cos a - \frac{du}{dy} \sin a \right) (\phi' a + \phi'' a) da;$$

L'équation $du = 0$ se décomposera donc en deux facteurs, savoir :

$$\phi' a + \phi'' a = 0; \quad \frac{du}{dx} \cos a - \frac{du}{dy} \sin a = 0;$$

le premier donne en intégrant

$$\phi a + \phi' a = \text{const.};$$

et si l'on élimine $\phi' a$ entre cette équation et $u = 0$, on aura une intégrale première complète de $u = 0$. Quant au second facteur de $du = 0$, il ne renferme pas $\phi'' a$, et l'équation qu'on obtient en l'égalant à zéro, est du second ordre comme $u = 0$; éliminant donc $\phi'' a$ entre ces deux équations,

$$\frac{du}{dx} \cos a - \frac{du}{dy} \sin a = 0, \quad u = 0,$$

on obtiendra une équation du premier ordre, sans constante arbitraire, qui sera une solution particulière de $u = 0$. Or, maintenant on voit que l'intégrale de $u = 0$ est étrangère à la question qui nous occupe, puisqu'elle donne une constante pour la quantité $\phi a + \phi' a$, qui représente la valeur de l'arc s ; c'est donc la solution particulière qui devra servir à déterminer ϕa ; on en tirera la valeur de $\phi' a$, sans constante arbitraire, et en intégrant on aura celle de ϕa , et par suite celle de s avec une seule constante, ainsi que cela doit être.

La même observation s'applique au cas où l'on donne l'arc s en fonction des coordonnées x et y , et où l'on demande l'équation de la courbe. En mettant dans l'équation donnée, à la place

de x , y et s , leurs valeurs, on aura une équation différentielle du second ordre, contenant φa , $\varphi' a$, $\varphi'' a$: ce sera sa solution particulière, et non pas son intégrale qui devra servir à déterminer φa ; mais comme cette solution particulière contiendra φa et $\varphi' a$, il faudra l'intégrer pour en déduire la valeur de φa , laquelle renfermera ainsi une constante arbitraire. Substituant cette valeur dans celles de x et y , et éliminant ensuite a , on aura en x , y et une seule constante arbitraire, l'équation de la courbe demandée.

On peut remarquer que la difficulté dont nous venons de parler est semblable à celle qui se présente dans la théorie des *développées*, et que M. Lagrange a éclaircie de la même manière. Lorsque l'équation de la développée est donnée, celle de la *développante* ne peut contenir qu'une seule constante arbitraire, dépendante du point où l'on commence le développement; cependant, si l'on met dans l'équation donnée, à la place des deux coordonnées de la développée, leurs valeurs générales, il en résulte une équation différentielle du second ordre; mais M. Lagrange fait voir que son intégrale complète est l'équation d'un cercle qui a son centre sur la courbe donnée, et que cette équation du second ordre admet toujours une solution particulière du premier ordre, qui est proprement l'équation différentielle première de la développante. (Voyez la Théorie des fonctions, page 208 de la seconde édition.)

Décomposition des fractions rationnelles en d'autres fractions plus simples; par M. DE STAINVILLE.

Soit $\frac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle, dont le numérateur soit d'un degré moins élevé que le dénominateur; si on suppose que ce dénominateur soit du degré p , et qu'il contienne le facteur $x - a$ un nombre n de fois, et que, de plus, on substitue $a + y$ au lieu de x , tant au numérateur qu'au dénominateur, elle se changera en une autre dans laquelle le dénominateur ne pourra contenir de puissances de y , inférieures à n , de sorte qu'elle sera égale à

$$\frac{\psi a + y \psi' a + \frac{y^2}{2} \psi'' a + \dots + y^{p-1} \frac{\psi^{(p-1)} a}{1 \dots p-1}}{y^n \frac{\varphi^{(n)} a}{1 \dots n} + y^{n+1} \frac{\varphi^{(n+1)} a}{1 \dots n+1} + \dots + y^p \frac{\varphi^{(p)} a}{1 \dots p}}.$$

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par z^p , et qu'on fasse ensuite $zy = 1$, elle deviendra

$$\frac{z^p \psi a + z^{p-1} \psi' a + z^{p-2} \frac{\psi'' a}{1.2} + \dots + z \frac{\psi^{(p-1)} a}{1 \dots p-1}}{z^{p-n} \frac{\varphi^{(n)} a}{1 \dots n} + z^{p-n-1} \frac{\varphi^{(n+1)} a}{1 \dots n+1} + \dots + \frac{\varphi^{(p)} a}{1 \dots p}}$$

Le numérateur de cette fraction étant d'un degré plus élevé que le dénominateur, on peut effectuer la division et la pousser jusqu'à ce qu'on soit parvenu dans le quotient à un terme qui soit de même degré que la plus faible puissance de z dans le numérateur. Si on le représente par $Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \dots + Pz$, et qu'on désigne le reste par R , on aura une équation qui, étant débarrassée de ses dénominateurs, donnera par la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de z , les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi a &= A \frac{\varphi^{(n)} a}{1 \dots n} ; & \psi' a &= A \frac{\varphi^{(n+1)} a}{1 \dots n+1} + B \frac{\varphi^{(n)} a}{1 \dots n} ; \\ \frac{\psi'' a}{2} &= A \frac{\varphi^{(n+2)} a}{1 \dots n+2} + B \frac{\varphi^{(n+1)} a}{1 \dots n+1} + C \frac{\varphi^{(n)} a}{1 \dots n} . \end{aligned}$$

De ces équations il sera facile d'en déduire les valeurs de A, B, C , etc. Les valeurs de ces quantités étant ainsi déterminées, si on substitue, tant dans le quotient que dans le reste, $\frac{1}{y}$ au lieu de z , et $x - a$ au lieu de γ , on aura

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{\pi x}{fx} ;$$

fx étant ce que devient φx , lorsqu'on a supprimé dans ce dénominateur tous les facteurs égaux à $x - a$, et πx étant un polynôme de degré inférieur à fx , mais qu'il n'est point nécessaire d'obtenir pour avoir les fractions qui correspondent aux facteurs $x - b, x - c$, etc.

Si on suppose que le facteur $x - a$ ne se trouve qu'une seule fois dans φx , il faudra, pour déterminer le numérateur de la fraction qui correspond à ce dénominateur, faire $n = 1$ dans la première des équations précédentes, et on trouve

$$A = \frac{\psi a}{\varphi' a} ,$$

ce qui donne la règle connue, puisque ψa est le résultat de la substitution de a à la place de x dans le numérateur de la fraction proposée, et que $\varphi' a$ est le résultat de la substitution de a à la place de x dans le coefficient différentiel du dénominateur de cette même fraction.

M É C A N I Q U E.

Pendule à oscillations coniques ; par M. POUILLET (),
licencié ès sciences.*

Les équations générales du mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère sont :

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = c, \quad (1)$$

$$x dx + y dy + z dz = 0, \quad (2)$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2gz + c'; \quad (3)$$

on en déduit

$$dt = \frac{rdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(c' + 2gz) - c^2}}, \quad (4) \quad d\omega = \frac{cdt}{z^2 - r^2}. \quad (5)$$

(Mécanique de Poisson, liv. II, chap. IV.)

Ces deux dernières équations étant intégrées, donnent z et ω en fonctions du tems ; d'ailleurs

$$y = \sin \omega \sqrt{r^2 - z^2}, \quad x = \cos \omega \sqrt{r^2 - z^2}.$$

En y mettant pour z et ω , leurs valeurs en t , on aura z , y et x , en t , d'où l'on déduira les équations de la trajectoire ; la position du mobile à chaque instant sur cette courbe, sa vitesse en un point quelconque, en un mot toutes les circonstances du mouvement.

Appliquons ces formules générales au mouvement du pendule à oscillations coniques.

Supposons qu'un pendule d'une longueur r , ait été écarté de la verticale dans le plan des zx , d'un angle α , et qu'on lui imprime une vitesse a perpendiculaire à ce plan. Alors au commencement du mouvement, on a

$$1^\circ. \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = a, \text{ et (1) devient } -ax = c; \text{ d'ailleurs } x = r \sin \alpha, \text{ donc } c = -ar \sin \alpha;$$

(*) Article communiqué par M. Poisson.

2°. $z = r \cos \alpha$, $\frac{dz}{dt} = 0$, et (3) devient $a^2 = c' + 2gr \cos \alpha$;
donc $c' = a^2 - 2gr \cos \alpha$.

Soit θ l'angle du pendule avec la verticale en une position quelconque, on aura $z = r \cos \theta$. Prenant cette variable θ , au lieu de z , l'équation (4) devient

$$dt = r \cdot \frac{-\sin \theta d\theta}{\sqrt{a^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha) - 2gr \sin^2 \theta (\cos \alpha - \cos \theta)}}.$$

Posons $\sin^2 \theta = \rho$, $\sin^2 \alpha = m$, et afin de pouvoir intégrer, supposons que les troisièmes puissances de ρ et de m puissent être négligées, ce qui revient à supposer les angles θ et α assez petits pour qu'on puisse négliger les sixièmes puissances de leur sinus. Alors après les réductions, on a

$$dt = r \frac{-d\rho}{\sqrt{-\rho^3 (a^2 + gr) + \rho (a^2 + m(a^2 + gr)) - a^2 m}};$$

$$\text{d'où } t = \frac{r}{\sqrt{a^2 + gr}} \cdot \frac{1}{2} \text{arc} \left(\cos = \frac{2\rho - \left(\frac{a^2}{a^2 + gr} + m \right)}{m - \frac{a^2}{a^2 + gr}} \right),$$

et en posant $k^2 = \frac{a^2}{a^2 + gr}$, puis prenant l'arc entier au lieu d'un demi-arc

$$t = \frac{rk}{a} \cdot \text{arc} \left(\cos = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - k^2}{\sin^2 \alpha - k^2}} \right).$$

On voit d'après cela que

$k < \sin \alpha$	entraîne	$\sin \theta > k$,
$k = \sin \alpha$		$\sin \theta = k$,
$k > \sin \alpha$		$\sin \theta < k$.

Discutons successivement ces trois cas.

1°. Quand on a $k < \sin \alpha$ ou $a < \sqrt{gr} \cdot \tan \alpha$, pour $t = 0$, $\theta = \alpha$, si t augmente, $\sqrt{\frac{\sin^2 \theta - k^2}{\sin^2 \alpha - k^2}}$ diminue; donc $\sin \theta$ diminue jusqu'à $\sin \theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + gr}}$; alors $t = \frac{kr}{a} \cdot \frac{\pi}{2}$, t continuant d'augmenter, le cosinus reprend des valeurs croissantes,

OS. jusqu'à $\sqrt{\frac{\sin^2 \theta - k^2}{\sin^2 \alpha - k^2}} = 1$ ou $\theta = \alpha$; alors $t = \frac{kr}{a} \cdot \pi$, t continuant d'augmenter, le cosinus diminue jusqu'à $\sin \theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + gr}}$; alors $t = \frac{kr}{a} \cdot \frac{3\pi}{2}$, t continuant d'augmenter, le cosinus reprend des valeurs croissantes, jusqu'à $\sqrt{\frac{\sin^2 \theta - h^2}{\sin^2 \alpha - k^2}} = 1$ ou $\theta = \alpha$; alors $t = \frac{kr}{a} \cdot 2\pi$, t augmentant encore, on aura une seconde oscillation tout-à-fait semblable à la première.

2°. Quand on a $k = \sin \alpha$ ou $a = \sqrt{gr} \tan \alpha$, il est nécessaire que $\sin \theta$ soit aussi égal à k ; c'est-à-dire, qu'alors le pendule décrit autour de la verticale au cône droit à base circulaire, dont l'angle au centre est double de celui de l'écart.

3°. Quand on a $k > \sin \alpha$ ou $a > \sqrt{gr} \tan \alpha$, pour $t = 0$, $\theta = \alpha$, si t augmente, $\sqrt{\frac{\sin^2 \theta - k^2}{\sin^2 \alpha - k^2}}$ diminue; donc $\sin \theta$ augmente, jusqu'à $\sin \theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + gr}}$, t continuant d'augmenter, le cosinus reprend des valeurs croissantes, jusqu'à..... $\sqrt{\frac{\sin^2 \theta - k^2}{\sin^2 \alpha - k^2}} = 1$ ou $\theta = \alpha$, t continuant d'augmenter, le cosinus diminue, jusqu'à $\sqrt{\frac{\sin^2 \theta - k^2}{\sin^2 \alpha - k^2}} = 0$. Par conséquent $\sin \theta$

reprend des valeurs croissantes jusqu'à $\sin \theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + gr}}$, t continuant d'augmenter, le cosinus augmente jusqu'à.....

$\sqrt{\frac{\sin^2 \theta - k^2}{\sin^2 \alpha - k^2}} = 1$. Par conséquent θ diminue jusqu'à $\theta = \alpha$; c'est-à-dire que si $a > \sqrt{gr} \tan \alpha$, le plus petit écart du pendule est l'écart primitif, et son plus grand écart a pour sinus $\frac{a}{\sqrt{a^2 + gr}}$:

or, pour trouver l'intégrale, nous avons supposé que les sixièmes puissances de $\sin \alpha$ et $\sin \theta$ soient négligeables; d'où il suit, que pour que la discussion précédente soit juste, il faut non-seulement

que α soit assez petit pour que $\sin^6 \alpha$ puisse être négligé; mais il faut encore que la force d'impulsion soit telle que la sixième puissance de $\frac{a}{\sqrt{a^2 + gr}}$ puisse être négligée; quand ces conditions seront remplies, on aura l'angle du pendule avec la verticale à un instant quelconque; quand elles ne le seront pas, il faudra reprendre les formules rigoureuses, et l'analyse précédente ne sera plus applicable.

Maintenant pour déterminer complètement sa position, cherchons α en fonction de t par la formule (5); elle est intégrable, soit qu'on cherche d'abord α en z , soit qu'on cherche directement α en t : ce moyen est plus court.

En remplaçant c et z par leurs valeurs, l'équation (5) devient

$$\begin{aligned} d\alpha &= ar \sin \alpha \cdot \frac{dt}{r^2 - z^2} = ar \sin \alpha \cdot \frac{dt}{r^2 \sin^2 \theta}; \\ \text{d'où} \quad d\alpha &= \frac{a \sin \alpha}{r} \cdot \frac{dt}{k^2 + (\sin^2 \alpha - k^2) \cos^2 t \cdot \frac{a}{rk}} \\ &= \frac{a \sin \alpha}{r^2} \cdot \frac{\left(1 + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right) dt}{k^2 \left(1 + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right) + \sin^2 \alpha - k^2} \\ &= \frac{a \sin \alpha}{rk^2} \cdot \frac{\frac{rk}{a} \left(1 + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right) dt}{\frac{\sin^2 \alpha}{k^2} + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}} \\ &= \frac{a \sin \alpha}{rk^2} \cdot \frac{\left(1 + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right)}{\frac{\sin^2 \alpha}{k^2} + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}} dt \cdot \frac{a}{rk}; \end{aligned}$$

mais la différentielle de l'arc $t \cdot \frac{a}{rk}$ est égale à $\frac{d \cdot \tan t \cdot \frac{a}{rk}}{1 + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}}$,

$$\text{ainsi} \quad d\alpha = \frac{\sin \alpha}{k} \cdot \frac{d \cdot \tan t \cdot \frac{a}{rk}}{\frac{\sin^2 \alpha}{k^2} + \tan^2 t \cdot \frac{a}{rk}};$$

d'où enfin $\alpha = \arcsin \left(\frac{\tan t \cdot \frac{a}{rk}}{\frac{\sin \alpha}{k}} \right),$

où $\tan \alpha = \frac{k}{\sin \alpha} \tan t \cdot \frac{a}{rk}.$

Tirant de là $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, pour les substituer dans y et x , et y mettant aussi pour z sa valeur en t , on trouve

$$y = rk \sin t \cdot \frac{a}{rk} \quad \text{et} \quad x = r \sin \alpha \cos t \cdot \frac{a}{rk};$$

ensorte qu'on a ces deux formules, et :

$$z = r \sqrt{\cos^2 \alpha + (\sin^2 \alpha - k^2) \sin^2 t \cdot \frac{a}{rk}},$$

pour déterminer à chaque instant la position du mobile. On en déduit pour les équations de la trajectoire,

$$\begin{cases} r^2 \sin^2 \alpha y^2 + r^2 k^2 x^2 = r^4 k^2 \sin^2 \alpha \\ r^2 \sin^2 \alpha z^2 + r^2 x^2 (k^2 - \sin^2 \alpha) = r^4 \sin^2 \alpha (1 - k^2), \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} r^2 \sin^2 \alpha y^2 + r^2 k^2 x^2 = r^4 k^2 \sin^2 \alpha \\ r^2 k^2 z^2 - r^2 y^2 (\sin^2 \alpha - k^2) = r^4 k^2 \cos^2 \alpha; \end{cases}$$

d'où il suit, qu'en général, la projection de la trajectoire sur le plan des xy est une ellipse, et sa projection sur le plan des zx est une ellipse ou une hyperbole, selon que k est $<$ ou $>$ $\sin \alpha$; c'est-à-dire, selon que la vitesse d'impulsion est $<$ ou $>$ $\sqrt{gr} \tan \alpha$; mais on voit par le second système, que quand c'est une ellipse sur le plan zx , c'est une hyperbole sur le plan zy , et *vice versa*. Pour le cas particulier $k = \sin \alpha$, ou $\alpha = \sqrt{gr} \tan \alpha$, la projection sur le plan xy , devient un cercle de rayon rk , et chacune des autres devient une ligne droite pour laquelle z est constant et $= r \cos \alpha$.

Connaissant ainsi les équations de la trajectoire, il est très-facile de trouver les points qui répondent à une valeur donnée de t . Leur z se trouvera immédiatement par $z = r \cos t$, et les x et les y de ces points sont ceux de la rencontre du cercle $y^2 + x^2 = r^2 \sin^2 t$ avec l'ellipse $r^2 \sin^2 \alpha y^2 + r^2 k^2 x^2 = r^4 k^2 \sin^2 \alpha$.

On trouve pour la vitesse du mobile à un instant quelconque,

$$v = \frac{a}{k} \cdot \sqrt{\frac{k^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \iota \cdot \frac{a}{rk} (\sin^2 \alpha - k^2)}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \iota \cdot \frac{a}{rk} (\sin^2 \alpha - k^2)}}.$$

Il est facile de voir qu'elle atteint son *maximum*, quand θ prend la plus petite valeur, c'est-à-dire, quand le mobile est au point le plus bas de sa trajectoire, et qu'elle atteint son *minimum*; quand θ prend sa plus grande valeur, c'est-à-dire, quand le mobile est au point le plus haut de sa trajectoire.

Pour le cas de θ constant, cette vitesse est constante et égale à la vitesse d'impulsion a .

En faisant $a = 0$ dans tout ce qui précède, on retrouve le pendule simple à petites oscillations, et toutes les circonstances de son mouvement.

Sur le mouvement de Rotation des corps libres ; par M. RODRIGUES, licencié ès-sciences.

Je prends dans la mécanique de M. Poisson les six équations du mouvement de rotation des corps libres,

$$\left. \begin{aligned} p dt &= \sin \theta \sin \varphi d\psi - \cos \varphi d\theta, \\ q dt &= \sin \theta \cos \varphi d\psi + \sin \varphi d\theta, \\ r dt &= d\varphi - \cos \theta d\psi. \end{aligned} \right\} (a) \quad (\text{pag. 133, tom. II.})$$

$$\left. \begin{aligned} C dr + (B - A) p q dt &= 0, \\ B dq + (A - C) p r dt &= 0, \\ A dp + (C - B) q r dt &= 0, \end{aligned} \right\} (c) \quad (\text{pag. 141, tom. I.})$$

et je me propose d'intégrer complètement ces six équations différentielles, en conservant aux axes des coordonnées toute leur généralité.

Je parviens, de même que dans l'ouvrage cité, aux équations

$$\left. \begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h^2, \\ Apa + Bqb + Crc &= l, \\ Apa' + Bqb' + Crc' &= l', \\ Apa'' + Bqb'' + Crc'' &= l'', \end{aligned} \right\} (b) \quad (\text{pag. 143, tom. I.})$$

ces trois équations carrées et ajoutées donnent

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2,$$

en posant

$$K^2 = l^2 + l'^2 + l''^2,$$

au moyen des équations $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2$, $A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2$ et des équations (c), on élimine p et q , et l'on a ainsi entre r et le tems t une équation, où les variables se séparent sur-le-champ, et qui donne le tems t en fonction de r au moyen d'une intégration. Ainsi, p, q, r sont déterminés en fonction du tems. Substituant ces valeurs dans les équations (b), on a trois équations entre φ, θ, ψ , et le tems t , mais qui se réduisent à deux à cause que $l^2 + l'^2 + l''^2 = K^2$. Il faut donc encore une intégrale pour compléter la solution de ce problème. Pour la trouver, j'observe que les équations (b) étant multipliées et ajoutées, la première par a , la deuxième par a' , la troisième par a'' , donnent

$$Ap = al + a'l' + a''l'',$$

On trouve de même $Bq = bl + b'l' + b''l'',$

$$Cr = cl + c'l' + c''l''.$$

Je multiplie la première par p , la seconde par q ; je les ajoute ensuite, et je divise par $(al + a'l' + a''l'')^2 + (bl + b'l' + b''l'')^2$, qui est égal à $K^2 - C^2 r^2$; j'obtiens ainsi

$$\frac{dt (Ap^2 + Bq^2)}{K^2 - C^2 r^2} = \frac{(al + a'l' + a''l'') p dt + (bl + b'l' + b''l'') q dt}{(al + a'l' + a''l'')^2 + (bl + b'l' + b''l'')^2} :$$

j'ai trouvé que cette formule était intégrable. En effet, mettons à la place de $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', p dt, q dt$, leurs valeurs

$$a = \cos \theta \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi, \quad p dt = \sin \theta \sin \varphi d\psi - \cos \varphi d\theta,$$

$$b = \cos \theta \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi, \quad q dt = \sin \theta \cos \varphi d\psi + \sin \varphi d\theta,$$

$$c = \sin \theta \sin \psi,$$

$$a' = \cos \theta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi,$$

$$b' = \cos \theta \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi,$$

$$c' = \sin \theta \cos \psi,$$

$$a'' = -\sin \theta \sin \varphi,$$

$$b'' = -\sin \theta \cos \varphi,$$

$$c'' = \cos \theta,$$

nous trouverons

$$+bq = d\psi (\sin \theta \cos \theta \sin \psi \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \theta \cos \theta \sin \psi \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \psi) \\ + d\theta (\sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \sin^2 \varphi \cos \psi - \cos^2 \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin \psi),$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & a p + b q = \sin \theta \cos \theta \sin \psi d\psi - \cos \psi d\theta, \\ \text{de même} \quad & a' p + b' q = \sin \theta \cos \theta \cos \psi d\psi + \sin \psi d\theta, \\ & a'' p + b'' q = -\sin^2 \theta d\psi. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & (al + a'l' + a''l'') p dt + (bl + b'l' + b''l'') q dt \\ &= \sin \theta d\psi [(l \sin \psi + l' \cos \psi) \cos \theta - l'' \sin \theta] - d\theta (l \cos \psi - l' \sin \psi); \\ \text{or,} \quad & (al + a'l' + a''l'')^2 + (bl + b'l' + b''l'')^2 \\ &= K^2 - (cl + c'l' + c''l'')^2 \\ &= K^2 - [\sin \theta (l \sin \psi + l' \cos \psi) + l'' \cos \theta]^2; \end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{K^2 - C^2 r^2} dt = \frac{\sin \theta d\psi (\cos \theta (l \sin \psi + l' \cos \psi) - l'' \sin \theta) - d\theta (l \cos \psi - l' \sin \psi)}{K^2 - [\sin \theta (l \sin \psi + l' \cos \psi) + l'' \cos \theta]^2}, \quad (d)$$

puisque l'on connaît p, q, r en fonctions du tems; en substituant leurs valeurs dans le premier membre de cette équation, on aura une formule qu'on intégrera par quadrature. Si donc je parviens à intégrer le deuxième membre en regardant les variables θ, ψ , comme indépendantes, j'aurai la dernière équation nécessaire pour compléter la solution du problème.

J'observe qu'en divisant haut et bas par $\sin^2 \theta$ dans la formule (d), et faisant $x = \cot \theta$, l'angle θ disparaît, et la formule devient

$$\frac{dx \cdot (l \cos \psi - l' \sin \psi) + d\psi (x (l \sin \psi + l' \cos \psi) - l'')}{K^2 (1 + x^2) - (l'' x + l \sin \psi + l' \cos \psi)^2}; \quad (d)$$

le dénominateur prend la forme

$$(K^2 - l''^2) x^2 - 2 x l'' (l \sin \psi + l' \cos \psi) + K^2 - (l \sin \psi + l' \cos \psi)^2.$$

Si on le multiplie par $K^2 - l''^2$, et qu'on observe que

$$K^2 - l''^2 = l^2 + l'^2 = (l \sin \psi + l' \cos \psi)^2 + (l \cos \psi - l' \sin \psi)^2,$$

il devient

$$[(K^2 - l''^2) x - l'' (l \sin \psi + l' \cos \psi)]^2 + K^2 (l \cos \psi - l' \sin \psi)^2.$$

Ainsi la formule (d) devient

$$\frac{(K^2 - l''^2) (l \cos \psi - l' \sin \psi) dx - (K^2 - l''^2) d\psi [l'' x (l \sin \psi + l' \cos \psi)]}{[(K^2 - l''^2) x - l'' (l \sin \psi + l' \cos \psi)]^2 + K^2 (l \cos \psi - l' \sin \psi)^2}. \quad (d)$$

Sous cette forme, elle est facilement intégrable par rapport à x , et l'on trouve pour résultat

$$\frac{1}{K} \text{arc.tang.} \cdot \frac{(K^2 - l'^2) x - l''(l \sin \psi + l' \cos \psi)}{K (l \cos \psi - l' \sin \psi)}.$$

Assurons-nous par la différentiation par rapport à ψ , que cette formule est aussi l'intégrale en ψ . On trouve en effet

$$\frac{1}{K} \frac{\{K(K^2 - l'^2)x - l''(l \sin \psi + l' \cos \psi)(l \sin \psi + l' \cos \psi) - lK(l \cos \psi - l' \sin \psi)(l \cos \psi - l' \sin \psi)\} d\psi}{[(K^2 - l'^2)x - l''(l \sin \psi + l' \cos \psi)]^2 + K^2 (l \cos \psi - l' \sin \psi)^2},$$

expression qui se réduit à

$$-\frac{(K^2 - l'^2) d\psi (l'' - x(l \sin \psi + l' \cos \psi) d\psi)}{[(K^2 - l'^2)x - l''(l \sin \psi + l' \cos \psi)]^2 + K^2 (l \cos \psi - l' \sin \psi)^2},$$

qui est la partie relative à ψ dans la formule (d).

Remettant pour x sa valeur, l'équation que nous cherchons, et qui est la sixième intégrale des équations du mouvement de rotation, est

$$\int \frac{(Ap^2 + Bq^2)K dt}{K^2 - C^2 r^2} = \text{const.} + \text{arc.tang.} \cdot \frac{(K^2 - l'^2) \cot \theta - l''(l \sin \psi + l' \cos \psi)}{K (l \cos \psi - l' \sin \psi)}.$$

Pour construire cette expression trigonométrique, je vais introduire les angles que la droite perpendiculaire au plan invariable fait avec les axes des coordonnées. Soient α, β, γ ces angles, on aura (voyez la mécanique de M. Poisson)

$$l = -K \cos \alpha, \quad l' = -K \cos \beta, \quad l'' = -K \cos \gamma.$$

Appelons ω l'angle formé par cette droite avec l'axe du corps, nous aurons

$$\cos \omega = -\frac{(cl + c'l' + c''l'')}{K};$$

$$\text{or,} \quad \sin \psi = \frac{c}{\sin \theta}, \quad \cos \psi = \frac{c'}{\sin \theta};$$

on a donc par ces substitutions

$$\frac{(K^2 - l'^2) \cot \theta - l''(l \sin \psi + l' \cos \psi)}{K(l \cos \psi - l' \sin \psi)} = \frac{\sin^2 \gamma \cos \theta - \cos \gamma (c \cos \alpha + c' \cos \beta)}{c \cos \beta - c' \cos \alpha} = \frac{\cos \theta - \cos \gamma \cos \omega}{c \cos \beta - c' \cos \alpha}. \quad (A)$$

Mais $(c \cos \beta - c' \cos \alpha)^2 = \sin^2 \gamma \sin^2 \theta - (c \cos \alpha + c' \cos \beta)^2$;
d'ailleurs $(c \cos \alpha + c' \cos \beta)^2 = (\cos \omega - \cos \gamma \cos \theta)^2$.

On a donc (A) cette nouvelle expression, au lieu de la précédente (A)

$$\frac{\cos \theta - \cos \gamma \cos \omega}{\sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \theta - (\cos \omega - \cos \gamma \cos \theta)^2}}; \quad (A)$$

donc le sinus de l'arc, dont (A) est la tangente, est égal à

$$\frac{\cos \theta - \cos \gamma \cos \omega}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \gamma \cos \omega)^2 - (\cos \omega - \cos \gamma \cos \theta)^2 + \sin^2 \gamma \sin^2 \theta}} = \frac{\cos \theta - \cos \gamma \cos \omega}{\sin \gamma \sin \omega}.$$

Or, si nous observons que θ est l'angle formé par l'axe du corps et l'axe fixe, γ celui formé par l'axe fixe et l'axe du plan principal, ω l'angle de l'axe du corps et de ce dernier axe, nous voyons par la trigonométrie sphérique que $\frac{\cos \theta - \cos \gamma \cos \omega}{\sin \gamma \sin \omega}$ est le cosinus de l'angle formé par le plan, qui passe par l'axe du plan principal et par l'axe fixe, avec le plan passant par la première de ces deux droites et par l'axe du corps; lequel angle est le même que celui que la trace du plan des xy , pris dans les corps sur le plan principal, fait avec l'intersection de ce plan avec le plan fixe des xy . Nommant le complément cet angle ψ' , on a

$$\psi' - \text{const.} = \int \frac{K dt (Ap^2 + Bq^2)}{K^2 - c^2 r^2},$$

et à cause de la constante arbitraire, l'angle ψ' peut être compté dans le plan principal à partir d'une droite quelconque qui sera l'axe des x dans ce plan; mais de manière que cet angle augmentant, l'angle qui sera formé avec l'axe des y , augmente aussi. La correspondance à établir entre ce résultat final et celui qu'on obtient en suivant la marche de l'ouvrage cité, est trop simple pour que nous nous y arrêtions.

De l'angle de contingence d'une courbe à double courbure.

(Question proposée à la thèse de licence, soutenue par M. RODRIGUES, le 29 novembre 1813.)

Cet angle est formé, comme on sait, par deux tangentes consécutives à la courbe. Soient a, b, c les cosinus des angles que forme avec les axes la première de ces tangentes; $a+da, b+db, c+dc$ seront ceux des angles que forme la tangente consécutive. Et si l'on appelle : l'angle de contingence, on aura

$$\cos : = a(a+da) + b(b+db) + c(c+dc);$$

mais à cause que les coordonnées sont rectangles, on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$(a+da)^2 + (b+db)^2 + (c+dc)^2 = 1,$$

$$\text{ou} \quad -2(ada + bdb + cdc) = da^2 + db^2 + dc^2;$$

de l'expression de $\cos \epsilon$, je tire

$$\sin^2 \epsilon = -2(ada + bdb + cdc) - (ada + bdb + cdc)^2 = da^2 + db^2 + c^2,$$

en négligeant les infiniments petits du quatrième ordre. Mais

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds};$$

$$\text{donc} \quad \sin^2 \epsilon = \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2,$$

ou prenant l'arc à la place du sinus

$$\epsilon = \sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2};$$

on tire de là le rayon de courbure

$$r = \frac{ds}{c} = \frac{ds}{\sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

Sur la résistance qu'éprouve un point matériel assujéti à se mouvoir sur une courbe donnée ; par M. RODRIGUES.

Appelons N cette résistance qui est dirigée normalement à la courbe donnée. Soient $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ les angles que sa direction fait avec les axes des coordonnées. Cette résistance est, comme on sait, égale et directement opposée à la pression que le point exerce sur la courbe dans son mouvement. Les équations de ce mouvement sont

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - X &= N \cos \epsilon \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - Y &= N \cos \epsilon' \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - Z &= N \cos \epsilon'' \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(Mécanique de M. Poisson,} \\ \text{pag. 371, tom. I.)} \end{array}$$

Je me propose ici de démontrer d'une manière purement analytique, que cette force N est égale et directement opposée à la résultante de deux forces normales à la courbe, l'une provenant des forces imprimées au mobile, et qui serait, dans l'état d'équi-

libre, la pression que supporterait la courbe, l'autre due à la vitesse du mobile égale au carré de cette vitesse divisé par le rayon de courbure, et dirigée suivant ce rayon du dedans au dehors, tendant en effet à éloigner le mobile du centre de la courbure; et qu'on nomme pour cela force centrifuge.

Mais il est nécessaire de rappeler ici l'expression analytique des cosinus des angles que la direction de ce rayon fait avec les axes des coordonnées. Appelons $\delta, \delta', \delta''$ ces angles; α et γ les coordonnées du centre du cercle osculateur; r le rayon de ce cercle, on aura évidemment

$$\cos \delta = \frac{x - \alpha}{r}, \quad \cos \delta' = \frac{y - \beta}{r}, \quad \cos \delta'' = \frac{z - \gamma}{r},$$

et ces cosinus ainsi pris, appartiennent nécessairement au prolongement du rayon à partir de la courbe, et en dehors de sa concavité.

Maintenant on trouve par la théorie des osculations, qu'en posant l'élément ds de la courbe constant,

$$\begin{aligned} x - \alpha &= -\frac{d^2x \cdot ds^2}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}, & y - \beta &= -\frac{d^2y \cdot ds^2}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}, \\ z - \gamma &= -\frac{d^2z \cdot ds^2}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}, & r &= -\frac{ds^4}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}; \end{aligned}$$

on aura donc

$$\cos \delta = -r \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos \delta' = -r \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos \delta'' = -r \frac{d^2z}{ds^2},$$

ou en rétablissant l'indépendance des différentielles

$$\cos \delta = -r \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos \delta' = -r \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos \delta'' = -r \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Revenons maintenant aux équations du mouvement. On peut leur donner la forme

$$\begin{aligned} \frac{ds d^2x - dx d^2s}{ds dt^2} - \left(X - \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) &= N \cos \epsilon, \\ \frac{ds d^2y - dy d^2s}{ds dt^2} - \left(Y - \frac{dy}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) &= N' \cos \epsilon', \\ \frac{ds d^2z - dz d^2s}{ds dt^2} - \left(Z - \frac{dz}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) &= N'' \cos \epsilon''. \end{aligned}$$

Mais $dsdx - dxds = ds^2 d \frac{dx}{ds}$, $dsdy - dyds = ds^2 d \frac{dy}{ds}$;
 $dsdz - dzds = ds^2 d \frac{dz}{ds}$;

d'ailleurs $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2$, et par les valeurs précédentes de $\cos \delta$, $\cos \delta'$, $\cos \delta''$, on a

$$d \frac{dx}{ds} = -\frac{ds}{r} \cos \delta, \quad d \frac{dy}{ds} = -\frac{ds}{r} \cos \delta', \quad d \frac{dz}{ds} = -\frac{ds}{r} \cos \delta''.$$

Ces équations prennent donc la forme

$$\begin{aligned} -\frac{v^2}{r} \cos \delta - \left(X - \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) &= N \cos \epsilon, \\ -\frac{v^2}{r} \cos \delta' - \left(Y - \frac{dy}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) &= N \cos \epsilon', \\ -\frac{v^2}{r} \cos \delta'' - \left(Z - \frac{dz}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) &= N \cos \epsilon''. \end{aligned}$$

Mais j'observe que $X - \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$, $Y - \frac{dy}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$, $Z - \frac{dz}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$, sont les composantes des forces normales imprimées au mobile : en effet, pour avoir ces composantes, il faut des composantes totales X, Y, Z , retrancher les composantes de la force tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2}$, savoir : $\frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{dy}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{dz}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$. On voit donc par là que les composantes $N \cos \epsilon$, $N \cos \epsilon'$, $N \cos \epsilon''$, de la résistance N sont égales et de signe contraire aux sommes des composantes $\frac{v^2}{r} \cos \delta$,

$X - \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$, etc. ; d'où il est clair que cette résistance est égale et directement opposée à la résultante de deux forces normales à la courbe, l'une provenant des forces imprimées au mobile, et l'autre due à la vitesse du mobile, laquelle se mesure par le carré de cette vitesse divisé par le rayon de la courbure, et est dirigée suivant ce rayon du dedans de la courbe au dehors, de manière à éloigner le mobile du centre de courbure.

ASTRONOMIE.

Recherche des variations qu'éprouvent les ascensions droites et les déclinaisons des Etoiles, en vertu d'un petit déplacement de l'équateur et de la ligne des équinoxes ; par M. PUISSANT ().*

Pour démontrer les formules de nutation données par Lambert, M. Cagnoli a recours aux analogies différentielles de la trigonométrie sphérique. D'autres géomètres, et notamment MM. Biot et Delambre, sont parvenus à ces formules par des considérations purement élémentaires; mais, en ne renonçant pas à l'usage du calcul différentiel, on peut les obtenir *a priori*, et très-simplement, par la méthode suivante.

Equations fondamentales.

Désignons par E le lieu d'une étoile, par P le pôle de l'équateur céleste, par P' celui de l'écliptique; et soient A l'ascension droite moyenne de l'étoile, D sa déclinaison moyenne supposée boréale, L sa longitude supposée moindre que 90° , λ sa latitude boréale. Enfin, appelons ω l'obliquité de l'écliptique.

Cela posé, dans le triangle sphérique EPP' , on aura évidemment

$$PP' = \omega, \quad PE = 90^\circ - D, \quad P'E = 90^\circ - \lambda, \\ \text{angle } P' = 90^\circ - L, \quad \text{angle } P'PE = 90^\circ + A,$$

et ce même triangle offrira les relations

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sin D = \sin \omega \cos \lambda \sin L + \cos \omega \sin \lambda, \\ (2) \quad & \tan A = - \frac{\tan \lambda \sin \omega - \cos \omega \sin L}{\cos L}, \\ (3) \quad & \cos A \cos D = \cos \lambda \cos L, \\ (4) \quad & \sin \lambda = \cos \omega \sin D - \sin \omega \cos D \sin A. \end{aligned}$$

SOLUTION.

La variation d'obliquité due à un mouvement de rotation de l'équateur autour de la ligne des équinoxes, n'a point d'influence

(*) Voyez, pour l'intelligence de cet article, le *Traité d'astronomie physique*, par M. Biot, tom. II, pag. 111 et suivantes.

sur les latitudes ni sur les longitudes des astres, mais elle affecte leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. Quant au déplacement des points équinoxiaux, il produit nécessairement un changement, tant dans ces dernières coordonnées que dans les longitudes. Les effets réunis de ces deux causes étant supposés très-petits, il en résulte qu'en différentiant les équations (1) et (3), et faisant varier à-la-fois A , D , ω et L , on parviendra, après quelques transformations faciles, aux formules dont il s'agit. En effet, on trouve par la première équation,

$$dD = d\omega \left(\frac{\cos \omega \cos \lambda \sin L - \sin \omega \sin \lambda}{\cos D} \right) + dL \cdot \frac{\sin \omega \cos \lambda \cos L}{\cos D};$$

et comme l'équation (2) peut s'écrire ainsi :

$$\cos L \frac{\sin A}{\cos A} \cos \lambda = \cos \omega \sin L \cos \lambda - \sin \omega \sin \lambda,$$

il en résulte que l'équation différentielle précédente, en ayant d'ailleurs égard à la relation (3), se réduit à celle-ci :

$$(5) \quad dD = d\omega \sin A + dL \sin \omega \cos A,$$

Telle est la variation en déclinaison cherchée.

L'équation (3) étant différentiée, on en tire

$$dA = - \frac{dD \cos A \sin D}{\sin A \cos D} + \frac{dL \cos \lambda \sin L}{\sin A \cos D};$$

mais les équations (1) et (4) donnent

$$\cos \lambda \sin L = \frac{\sin D - \cos \omega \sin \lambda}{\sin \omega} = \sin \omega \sin D + \cos \omega \sin A \cos D.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, ainsi que celle de dD , on obtient, réductions faites,

$$(6) \quad dA = -d\omega \cos A \tan D + dL (\cos \omega + \sin \omega \sin A \tan D).$$

Les formules (5) et (6) seront celles de *nutation lunaire* en déclinaison et en ascension droite, si on met pour $d\omega$ et dL leurs valeurs relatives à ce phénomène. Or, l'observation et la théorie de l'attraction universelle ont fait connaître que la variation d'obliquité et celle de la longitude sont dépendantes de la longitude moyenne du nœud ascendant N de la lune, et que l'on a

$$d\omega = 9'',6 \cos N, \quad dL = - \frac{9'',6 \cos 2\omega}{\cos \omega} \cdot \frac{\sin N}{\sin \omega},$$

$9'',6$ étant le demi-grand axe de l'ellipse de nutation, et $\frac{9'',6 \cos 2\omega}{\cos \omega}$ son demi petit axe. (*Mécanique céleste*, tom. II, pag. 351; et *Abrégé d'astronomie* de Delambre, pag. 514.)

Cela posé, soit, pour abréger,

$$d\omega = m \cos N, \quad dL = -n \sin N,$$

les formules (5) et (6) se changeront en celles-ci

$$\text{nut. en décl.} \quad = m \sin A \cos N - n \sin \omega \cos A \sin N,$$

$$\text{nut. en asc. dr.} \quad \left\{ \begin{array}{l} = -m \tan D \cos A \cos N \\ \quad - n \sin \omega \tan D \sin A \sin N - n \cos \omega \sin N; \end{array} \right.$$

mais en général

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin (x + y) + \frac{1}{2} \sin (x - y),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos (x + y) + \frac{1}{2} \cos (x - y),$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos (x - y) - \frac{1}{2} \cos (x + y).$$

Ainsi

dD ou

$$\text{nut. en décl.} \quad = \frac{1}{2} (m - n \sin \omega) \sin (A + N) + \frac{1}{2} (m + n \sin \omega) \sin (A -$$

dA ou

$$\text{nut. en asc. dr.} \quad \left\{ \begin{array}{l} = -n \cos \omega \sin N \\ \quad - \tan D \left[\frac{1}{2} (m - n \sin \omega) \cos (A + N) + \frac{1}{2} (m + n \sin \omega) \cos (A - \right. \end{array} \right.$$

Si donc D' et A' sont respectivement la déclinaison et l'ascension droite apparente, on aura

$$D' = D + dD, \quad A' = A + dA.$$

Ces deux formules de nutation sont calculées dans la supposition que la déclinaison D est boréale; mais il est facile de voir que si cette déclinaison était australe, il faudrait seulement prendre la valeur de dD avec un signe contraire.

En faisant $d\omega = 0$ dans les formules (5) et (6), on obtient sur-le-champ celles de précession en ascension droite et en déclinaison; mais on a $dL = 50'',1$. On voit par-là combien la méthode précédente est générale et simple.

De la vis d'Archimède ; par M. HACHETTE.

On suppose la vis réduite à un tube hélicoïde (pl. 3) *Ocek* (fig. 1, *a*), *O'c'e'k'* (fig. 1, *b*), dont l'axe est *E* (fig. 1, *a*), *E'K'* (fig. 1, *b*). Cet axe fait, avec la tangente à l'hélice au point (*C, C'*), et avec le plan horizontal du niveau des eaux, les angles *E'C'M'*, *E'C'T'*.

I.

Le point *O, O'* étant l'origine du tube hélicoïde, et en même tems l'orifice par lequel l'eau s'introduit dans le tube, l'élément de l'hélice en ce point doit, en tournant autour de l'axe *E, (E' E')*, prendre des positions telles que l'eau puisse s'écouler sur cet élément comme sur un plan incliné ; ce qui ne peut avoir lieu que lorsque *le tube hélicoïde tourne dans un sens contraire à celui du point générateur de l'hélice.*

II.

Si on suppose que le tube, après avoir fait plusieurs révolutions autour de son axe, passe de l'état de mouvement à celui du repos, il sera divisé en plusieurs portions contenant alternativement ou de l'eau ou de l'air. Soient (*c, c'*), (*e, e'*) les points pour lesquels les tangentes à l'hélice sont parallèles au plan horizontal, la portion du tube contenant l'eau sera la plus grande possible, lorsqu'elle sera égale à la portion d'hélice *cek, c'e'k'*, comprise entre les points (*c, c'*), (*e, e'*) ; l'eau n'obéissant qu'à la loi de la pesanteur, remplira cet espace, et l'air compris entre deux portions consécutives d'eau, sera de même densité que l'air atmosphérique.

III.

Pour que l'air atmosphérique remplisse les intervalles qui séparent les arcs d'hélice remplis d'eau, il faut, à chaque révolution du tube, introduire un volume d'air atmosphérique égal au volume d'eau qui s'échappe par l'orifice supérieur du tube.

Le tube hélicoïde et son inclinaison par rapport au plan du niveau des eaux, étant donnés, la position de ce plan par rapport au cercle décrit par l'orifice inférieur du tube, est déterminée : lorsque l'arc d'hélice, correspondant à l'arc de cercle que cet orifice décrit au-dessus du niveau des eaux, n'est pas égal en développement, à l'arc d'hélice qui doit contenir le *maximum* d'eau, l'air compris entre deux portions consécutives d'eau n'est pas de même densité que l'air atmosphérique, et une partie de la force qui fait

tourner ce tube, est employée à produire des mouvemens d'air qui sont perdus pour l'effet utile de la vis.

IV.

Si le cercle décrit par l'orifice inférieur du tube, plonge entièrement dans un réservoir, l'eau élevée dans le tube tend à descendre avec une vitesse qui croît en même tems que la hauteur du niveau de l'eau dans l'intérieur de ce tube; et lorsque cette vitesse est égale à celle que l'eau acquiert par la rotation de la vis, l'eau cesse de s'élever.

V.

En augmentant continuellement la vitesse de rotation de la vis, la force centrifuge devient plus grande que la gravité; et l'eau, au lieu de monter, s'échappe par l'orifice inférieur du tube.

VI.

Détermination des points (c, c'), (e, e') de l'hélice, pour lesquels la tangente à cette courbe est parallèle au plan du niveau des eaux.

(Voyez la construction de cette tangente, supplément de la *Géométrie descriptive*, pag. 86, art. 96.)

$$\text{angle } TC'E' = \alpha, \quad \text{angle } M'C'E' = \beta, \quad C'E' = h,$$

$$E'M' = EM = EV = \frac{h \sin \beta}{\cos \beta}, \quad E'T = Et = \frac{h \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$V'E : 1 :: Et : \sin \text{arc } Oc = \frac{Et}{V'E} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \sin \text{arc } (\alpha e).$$

Un sinus est toujours plus petit que l'unité; donc on doit avoir $\beta > \alpha$. Cette condition étant satisfaite, ainsi que celle de l'art. I, l'eau pourra s'élever dans le tube hélicoïde.

VII.

Tous les points tels que (c, c') ou (e, e'), pour lesquels la tangente à l'hélice est parallèle au plan du niveau des eaux, sont situés sur une arête du cylindre droit qui a pour base le cercle décrit par l'orifice inférieur du tube. Lorsque cet orifice sera en (c, c''), le point du tube pour lequel la tangente sera horizontale, occupera la position (e, e''), telle que l'arc d'hélice ce, c''e'' sera de même longueur que l'arc (ce, c'e'), et tandis que l'orifice inférieur du tube décrira l'arc de cercle ce, fig. 1 a, c''i, fig. 1 b, l'élément du tube près cet orifice, aura (I) l'inclinaison convenable, pour recevoir l'eau du réservoir; car si l'on suppose l'orifice inférieur en un point (m, m') de l'arc de cercle (ce, c''), l'élément du

tube en ce point sera parallèle à l'élément de l'hélice (ce , $c'e'$) au point (m , n); donc, si le niveau des eaux passe par le point (c , c''), ou au-dessus de ce point, cet arc d'hélice ce , $c''e''$, contenant l'eau, sera le plus grand possible; mais il peut arriver que l'arc d'hélice correspondant à l'arc de cercle que l'orifice inférieur du tube décrit au-dessus du niveau des eaux, et qui se remplit d'air, ne soit pas égal en développement à la portion d'hélice (ce , $c''e''$): dans ce cas (III), on n'élèvera pas à chaque révolution de la vis, une portion d'eau égale à celle dont cet arc est capable. Le *maximum* d'effet de la vis dépend donc du rapport entre une portion d'hélice, dont la limite est déterminée par l'inclinaison du tube hélicoïde, et la portion d'arc de cercle décrit par l'orifice inférieur du tube au-dessus du niveau des eaux.

Note sur la vis d'Archimède; par M. NAVIER, ingénieur des ponts et chaussées.

La vis d'Archimède est une des machines les plus propres à piquer la curiosité, et sur la nature de laquelle il est le plus difficile de se former des notions exactes. Sa théorie a été traitée par plusieurs savans. Pitot a donné des recherches sur ce sujet dans les Mémoires de l'académie pour 1736. Soit MN , $M'N'$ (fig. 2, pl. 3) un tube roulé en nélice sur un cylindre; et soit mené des plans horizontaux pq , $p'q'$, etc., tangens aux révolutions de l'hélice; ces plans intercepteront sous eux des arcs pNq , $p'N'q'$, etc., dans lesquels il se tiendrait de l'eau, si l'on suppose qu'une vis étant en repos, on en verse par son extrémité supérieure. C'est ce que Pitot nomme *arc hydrophore*. Il suppose que quand une vis est en mouvement, les arcs hydrophores montent remplis d'eau, et calcule en conséquence la quantité qu'elle peut fournir, et l'effort qu'il faut employer pour la faire mouvoir.

Daniel Bernoulli a traité dans son *Hydrodynamique*, qui a paru en 1738, la théorie de la vis d'Archimède, à-peu-près de la même manière que Pitot, quoiqu'il y ait toute apparence qu'il n'avait pas connaissance de son travail.

Euler a repris la théorie de la vis d'Archimède dans un Mémoire imprimé dans le tome 5 des Mémoires de Pétersbourg.

Je ne connais point sur ce sujet de recherches analytiques postérieures à celles d'Euler qui méritent quelque attention.

Tous les ingénieurs connaissent un tableau d'expériences faites sur la vis d'Archimède, sous la direction de M. Garipuy, directeur du canal du Languedoc. On se servait de vis dont l'angle d'in-

clinaison de l'hélice sur l'axe était de 60° anciens. On a varié les hauteurs, les diamètres et les inclinaisons. Il est résulté que la vis ne montait point d'eau quand son axe faisait avec l'horison un angle d'environ 60° , et qu'elle donnait le plus grand produit quand cet angle était de 30° ; en sorte qu'il paraît que l'angle d'inclinaison qui comporte à vitesses égales le *maximum* d'eau élevée, est la moitié de l'angle que l'hélice fait avec son axe, et est indépendant de la vitesse de rotation. Il est très-remarquable que ce résultat, si simple et si utile, n'ait été trouvé par aucun des savans qui se sont occupés de cette machine.

Le rapprochement des expériences faites dans les épuisemens par la vis d'Archimède, a appris que moyennement un homme pouvait, en vingt-quatre heures, monter 90 mètres cubes d'eau à un mètre de hauteur, par le moyen de cette machine. (Voyez le *Traité de la construction des ponts*, par M. Gauthey, tom. II.)

Ces deux résultats suffisent sans doute à tous les besoins de la pratique, et on n'a ici pour objet que de faire quelques observations sur la nature du mouvement de la vis.

Il y a dans toute machine deux élémens qui constituent son produit; l'un est la quantité d'eau qu'elle monte, et l'autre la vitesse d'ascension. Quelquefois ces deux élémens sont très-distincts, comme dans une pompe où on considère facilement à part le volume d'eau monté à chaque levée du piston, et le nombre de levées que le piston fait dans un temps donné. Dans la vis d'Archimède, ces deux élémens sont confondus, et il paraît que c'est à cela que tient principalement l'espèce d'obscurité qu'offre le jeu de cette machine.

Du volume d'eau monté par une vis.

Soit faite la projection de la vis sur un plan vertical passant par son axe, et supposons que le point M (fig. 3. pl. 3) projeté sur l'axe soit l'orifice d'entrée du tube; soit MT la tangente à l'hélice au point M ; soit menée l'horizontale MN , et nommons α l'angle nMN que fait l'axe de la vis avec l'horison, et θ l'angle constant nMT que cet axe fait avec l'hélice.

L'angle que fait la tangente MT avec l'horison est $\theta - \alpha$. On voit d'abord que l'eau n'entrera point dans le tube si $\theta = \alpha$. Si θ est $> \alpha$, l'eau tendra à y entrer avec la force accélératrice $g \sin(\theta - \alpha)$, g étant la gravité. Or, pour suivre la comparaison de la vis avec une pompe, le volume d'eau monté à chaque levée du piston, est proportionnel à la force accélératrice à laquelle l'eau cède en franchissant la soupape. De même, dans la vis, le volume d'eau monté sera proportionnel à la quantité $g \sin(\theta - \alpha)$.

De la vitesse avec laquelle l'eau monte dans la vis.

Soit v la vitesse angulaire imprimée à la vis, et r le rayon du cylindre. La vitesse de rotation vr se communiquera à l'eau qui y sera contenue : il en résultera que cette eau prendra, dans le sens des hélices, la vitesse $vr \sin \theta$, laquelle équivaut, dans le sens de l'axe de la vis, à la vitesse $vr \sin \theta \cos \theta$, et dans le sens vertical, à la vitesse $vr \sin \theta \cos \theta \sin \alpha$. Cette dernière quantité exprimera donc la hauteur verticale dont l'eau contenue dans la vis montera dans une seconde.

De l'inclinaison sous laquelle la vis donne le plus grand produit.

Le produit d'une machine est proportionnel au volume d'eau élevée multiplié par sa vitesse verticale. Donc le produit de la vis est proportionnel à la quantité

$$g \sin (\theta - \alpha) vr \sin \theta \cos \theta \sin \alpha,$$

ou, en supprimant les facteurs constans, à la quantité

$$\sin (\theta - \alpha) \sin \alpha,$$

En déterminant α de manière que cette quantité soit un *maximum*, on trouve $\alpha = \frac{1}{2} \theta$, conformément à l'expérience.

De la force nécessaire pour monter par une vis une quantité d'eau donnée à une hauteur donnée.

Il ne paraît point facile de déterminer par le calcul le volume d'eau qu'une vis monte dans une seconde, ou du moins on arriverait pour cela à des formules très-complicées, et on ne pourrait guère tenir exactement compte de circonstances importantes, telles que la contraction à l'entrée de l'eau dans la vis, et le frottement de l'eau dans les tubes. Mais comme on vient de trouver une quantité à laquelle ce volume est proportionnel, il suffit de faire usage des expériences connues sur les vis de divers diamètres pour le calculer dans tous les cas par une simple proportion. La quantité d'eau qu'une vis de position et de construction données montera par seconde étant fixée, il s'agit de savoir quelle force il faudra appliquer à la manivelle.

On remarquera à ce sujet que, si on fait abstraction des frottemens et contractions, il ne peut y avoir dans la vis aucune perte de force vive. Donc la force vive imprimée à la manivelle doit

être égale à la force vive représentée par l'ascension de l'eau, plus celle que l'eau peut conserver à l'instant où elle quitte la vis. Or, il est aisé de voir que cette dernière force vive est nulle; car le mouvement giratoire de la vis ne peut imprimer à l'eau, dans le sens des hélices, la vitesse $v \sin \theta$, que parce que les hélices se meuvent en sens contraire avec cette même vitesse : en sorte que l'eau se trouve emportée par la machine, en sens contraire de son mouvement, avec une vitesse égale à la vitesse relative avec laquelle elle se meut dans la machine. Donc elle n'a aucune vitesse à l'instant où elle la quitte, du moins si l'on néglige la vitesse provenant de la force centrifuge, comme cela est d'usage dans des cas semblables.

Il suit de là qu'abstraction faite des frottemens, la force vive dépensée à la manivelle doit être entièrement utilisée pour l'élévation de l'eau. Ces frottemens sont d'ailleurs très-peu considérables; en sorte que l'effet utile doit différer peu de la force vive dépensée.

Les causes de déchet dans la pratique, sont les pertes d'eau qui ont assez souvent lieu par les jointures de l'enveloppe extérieure, et sur-tout la nécessité où l'on est d'élever l'eau un peu plus haut que la buse de décharge, parce qu'elle doit retomber de la vis dans cette buse. On peut avancer que moyennement l'eau est élevée à 0^m.50 au moins plus haut qu'il ne serait nécessaire; en sorte que les vis ne montant guère l'eau dans les épuisemens à plus de 2 à 3 mètres, cette circonstance fait perdre une partie très-sensible de la force dépensée.

On peut admettre qu'un homme employé à faire mouvoir une manivelle, y dépense dans sa journée une force vive équivalente à 155 mètres cubes d'eau élevés à un mètre. Mais les vis sont mues ou par des manivelles inclinées qui fatiguent beaucoup plus les hommes, ou par des balanciers auxquels il y a lieu de croire qu'ils communiquent moins de force vive; en sorte que je ne crois pas qu'on puisse estimer à plus de 120 mètres cubes d'eau élevés à un mètre la force vive réellement transmise par les manœuvres aux vis. Si on suppose la hauteur moyenne de l'élévation de l'eau de 2 mètres, l'eau aura réellement été élevée à 2^m.50; en sorte qu'il y aura un cinquième à retrancher sur la force vive dépensée : cela réduira les 120 mètres cubes d'eau élevés à un mètre de force vive dépensée, à 96 mètres cubes d'eau élevés à la même hauteur. En admettant qu'il y ait 6 mètres cubes d'eau élevés à un mètre, pour représenter les frottemens et les pertes d'eau, l'effet utile serait réduit à 90 mètres cubes, conformément à l'expérience.

Sur les cas où l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles a lieu entre les espaces finis , décrits par les corps, lors des changemens de position d'un système ; par M. NAVIER , ingénieur des ponts et chaussées.

M. Lagrange a observé dans la Mécanique analytique que , pour que l'énoncé du principe des vitesses virtuelles exprimât dans tous les cas les véritables lois de l'équilibre, il fallait que l'on prît les espaces infiniment petits décrits par chaque point dans le premier instant du mouvement dans le sens de la force qui lui est appliquée. M. Fossombroni, dans un Mémoire imprimé à Florence en 1796, a remarqué qu'il y avait beaucoup de cas où le principe avait lieu en prenant les espaces finis décrits par les corps dans les changemens de situation du système; mais il n'a point donné de règle générale au moyen de laquelle on pût distinguer ces cas.

Soit l'équation du principe des vitesses virtuelles

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{etc.} = 0 ;$$

dans laquelle dp' , dp'' , dp''' , etc. sont les espaces infiniment petits parcourus par le point d'application de chaque force dans le sens de la direction de cette force, quand le système change infiniment peu de situation; et P' , P'' , P''' , etc. des forces qui se font équilibre sur le système, en satisfaisant à l'équation précédente. On peut l'écrire de cette manière :

$$P' \frac{dp'}{dt} + P'' \frac{dp''}{dt} + P''' \frac{dp'''}{dt} + \text{etc.} = 0 ;$$

et alors $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dp''}{dt}$, $\frac{dp'''}{dt}$, etc. sont des quantités finies, qui représentent les vitesses que prennent dans le premier instant les points d'application de chaque force dans le sens de sa direction, lorsque l'on imprime un mouvement au système.

Or il est aisé de voir que si, dans des cas particuliers, les vitesses $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dp''}{dt}$, etc. restaient constantes lorsque le système passe d'une position à une autre; les espaces finis que décrirait chaque point dans les mouvemens du système, dans le sens des

directions des forces, seraient proportionnels à ces mêmes vitesses. Donc on pourrait substituer ces espaces finis aux vitesses dans l'équation ci-dessus, sans en changer la nature, et sans qu'elle cessât d'exprimer les conditions de l'équilibre. Il ne reste donc plus qu'à chercher quelle doit être la disposition d'une machine pour que, dans toutes les situations qu'elle peut prendre, les vitesses virtuelles des points d'application des forces conservent une valeur constante.

Cela posé, soit une machine quelconque en mouvement, à laquelle des forces sont appliquées. Tous les points d'application décrivent, dans un même instant infiniment petit, des petits espaces que je nomme de' , de'' , de''' , etc. Soit θ' , θ'' , θ''' , etc. les angles que la direction de chaque force fait avec l'espace parcouru par son point d'application, on aura

$$\begin{aligned} dp' &= de' \cos \theta', \\ dp'' &= de'' \cos \theta'', \\ dp''' &= de''' \cos \theta''', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Or, pour que dp' , dp'' , dp''' , etc. aient des valeurs constantes dans toutes les situations du système, il faut nécessairement, en général, que les valeurs de de' , de'' , de''' , etc. soient constantes, ainsi que celles des angles θ' , θ'' , θ''' , etc.

Pour distinguer maintenant les cas où de' , de'' , de''' , etc. ont des valeurs constantes, on remarquera que $L = 0$, $M = 0$, etc. étant les équations de condition du système, exprimées en fonction des coordonnées x' , y' , z' ; x'' , y'' , z'' etc. des corps; on obtient, en les différentiant, les équations $dL = 0$, $dM = 0$, etc.; d'où l'on déduit les relations que comporte la nature du système entre les espaces infiniment petits dx' , dy' , dz' ; etc. que chaque corps peut décrire en même tems dans le sens de chacune de ses coordonnées. On a ensuite

$$\begin{aligned} de' &= \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}, \\ de'' &= \sqrt{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}, \\ de''' &= \sqrt{dx'''^2 + dy'''^2 + dz'''^2}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

pour les espaces effectifs que ces corps décrivent. Or, les valeurs de de' , de'' , de''' , etc. ne peuvent être constantes qu'autant que dx' , dy' , dz' , etc. le seront aussi. Mais il faut pour cela que les équations $dL = 0$, $dM = 0$, etc., d'où les valeurs des différen-

tielles sont déduites, soient indépendantes des coordonnées, et par conséquent que les équations primitives $L = 0$, $M = 0$, soient des fonctions linéaires de ces coordonnées, afin que la différentiation les ait fait disparaître; d'où l'on conclut que les espaces effectifs infiniment petits parcourus en même tems par les différens points, ne peuvent en général avoir des valeurs constantes dans toutes les situations d'une machine, qu'autant que les équations de condition seront des fonctions linéaires des coordonnées. Si cette condition est remplie, et si ensuite la machine est tellement disposée que les directions des forces fassent toujours des angles égaux avec les espaces que décrivent les points d'application, les vitesses virtuelles seront constantes, et les espaces finis décrits par les corps dans le sens de chaque force, seront proportionnels aux vitesses virtuelles, et pourront les remplacer dans l'équation d'équilibre.

Il est aisé de voir que lorsque la disposition d'une machine satisfera à ces conditions, les valeurs que ces forces devront avoir pour se faire équilibre, seront les mêmes dans toutes les situations du système. D'ailleurs, le réciproque n'a pas toujours lieu, comme on peut le voir dans l'exemple suivant. Soit un levier aux extrémités duquel sont suspendus deux poids P' et P'' , (fig. a, pl. 3). Ces poids se font équilibre dans toutes les situations du levier; mais les angles formés par leurs directions avec les arcs que décrivent les points m' , m'' , varient, et on voit aussi que les poids ne sont point réciproquement proportionnels aux espaces finis décrits par les points m' , m'' estimés dans les sens des cordons $m'P'$, $m''P''$; ils le sont seulement aux espaces finis réellement décrits par ces points.

Mais si la condition que les mêmes valeurs des forces se font équilibre dans toutes les situations d'une machine, est réunie à celle que les directions des forces fassent des angles constans avec les espaces que décrivent les corps quand la machine marche, le cas d'exception remarqué par M. Fossombroni a également lieu, et il est aisé de s'assurer que l'existence de deux quelconques des trois conditions que l'on vient d'indiquer, entraîne celle de la troisième.

On peut vérifier ce qui précède sur les machines simples. En considérant d'abord les machines composées de poids suspendus à des cordes, on verra facilement que dans toutes les mouffles ou systèmes de poulies à cordons parallèles, où les équations de condition sont des fonctions linéaires des coordonnées, puisqu'elles expriment seulement que la montée d'un poids est dans un rapport donné avec la descente des autres, et où les directions des forces

se confondent avec les espaces réellement décrits par les corps, ces forces sont aussi toujours en raison inverse des espaces finis parcourus dans le même tems dans le sens de leurs directions, et conservent des valeurs constantes dans toutes les situations du système. Mais lorsque, dans le système de poulies, il y a des cordons qui ne sont point parallèles, alors les équations de condition ne sont plus des fonctions linéaires des coordonnées; et on peut voir sur le système de trois poids P' , P'' et P''' (fig. b, pl. 3), que quoique chaque force reste toujours dirigée dans le sens de l'espace parcouru par chaque point d'application, les poids ne sont point entre eux dans le cas de l'équilibre en raison inverse des espaces finis qu'ils parcourent en même tems, et les mêmes poids ne se font point équilibre dans toutes les situations du système.

Dans le levier considéré d'une manière générale, les deux premières conditions énoncées ci-dessus ne sont point remplies: aussi ne peut-on point, dans cette machine, mettre les espaces finis à la place des espaces infiniment petits.

Elles le sont dans le système de deux poids posés sur deux plans inclinés adossés et attachés à un même fil: aussi les espaces finis sont-ils proportionnels aux espaces infiniment petits.

Ces conditions sont également remplies dans la vis, où la même proportionnalité a lieu.

On peut donc établir la règle suivante:

Lorsque l'on veut savoir si, dans l'équation générale d'équilibre

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{etc.} = 0,$$

on peut mettre à la place de dp' , dp'' , dp''' , etc. les espaces finis décrits dans un même tems par les corps d'un système, sans que cette équation cesse d'exprimer les véritables lois de l'équilibre, il faut examiner si la disposition du système et des forces qui agissent sur lui est telle,

1°. Que les conditions de la liaison soient des fonctions linéaires des coordonnées, ou, ce qui revient au même, que les rapports des espaces infiniment petits, décrits en même tems par chaque corps, soient constans;

2°. Que les directions des forces fassent constamment les mêmes angles avec les lignes que décrivent leurs points d'application;

3°. Que les valeurs des forces qui se feraient équilibre sur la machine, soient les mêmes dans toutes les situations de cette machine.

Si, sur ces trois conditions, il y en a deux quelconques de remplies, la substitution des espaces finis aux vitesses virtuelles sera permise.

Application du principe des vitesses virtuelles, aux machines élémentaires qui ont pour objet de transmettre le mouvement circulaire d'un cercle à un autre cercle, situé ou non dans le même plan que le premier; par M. HACHETTE.

Considérons d'abord deux cercles situés dont les plans sont parallèles, et qui doivent tourner autour de leurs lignes des pôles, comme axes. Ayant mené un plan perpendiculaire à ces lignes, qui les coupe aux points (A et d) (fig. 1, pl. 4), soit menée la droite Ad . Les vitesses de rotation d'un point pris sur chacune des circonférences des cercles donnés, étant connues, on divisera la droite Ad en deux parties AB , Bd , telles que le rapport de ces deux parties soit égal à celui des vitesses des cercles données. Sur les droites AB , Bd , comme rayons, on décrira deux cercles c et c' , et on supposera ces cercles invariablement fixés aux cercles donnés. Nous n'avons plus maintenant à considérer que les deux cercles c et c' situés dans le même plan, et qui doivent tourner autour de leurs lignes de pôles A et d . Pour transmettre le mouvement circulaire du premier cercle au second, supposons qu'on ait fixé sur le premier cercle c une courbe aS qui tourne en même tems que ce cercle, et que cette courbe, considérée comme une rainure infiniment étroite, embrasse un point ou une cheville S située en un point de la circonférence du second cercle c' du rayon Bd et fixe sur ce cercle.

Quel que soit le sens dans lequel on fera tourner le cercle du rayon AD , la courbe aS poussera la cheville S , et le cercle du rayon Bd tournera en même tems. Ce mode de transmission du mouvement circulaire étant admis, on demande quel est le rapport des deux forces (P) et (Q) appliquées tangentiellement aux cercles des rayons AB , Bd , qui se font équilibre. Soient dp et dq les arcs infiniment petits parcourus par les forces P et Q dans le sens de leurs directions; il est évident que, d'après le principe des vitesses virtuelles, on doit avoir

$$Pdp + Qdq = 0;$$

et à cause que les petits arcs dp , dq sont égaux aux arcs aa' , Ss décrits dans le même tems par les points a et S des circonférences qui ont pour rayons AB et Bd , on aura

$$P.aa' - Q.Ss = 0;$$

d'où il suit que le rapport de deux forces P et Q est égal à celui

des arcs infiniment petits aa' et St . Donc, si l'on demande que ces deux forces soient égales, il faut qu'on ait

$$aa' = St.$$

Soit Bs l'épicycloïde décrit par le point B , pendant que la circonférence du rayon Bd roule sur le cercle du rayon AB , et supposons que cette courbe tourne en même tems que le cercle du rayon AB : tandis que le point B de cette courbe parcourra l'arc Ba , la cheville S , d'abord en B , décrira l'arc BS . Or, d'après les propriétés de l'épicycloïde, les arcs Ba et BS décrits dans le même tems, sont égaux. Donc les arcs aa' et St décrits dans un même tems infiniment petit, sont aussi égaux; d'où il suit que les forces P et Q qui sont appliquées tangentiellement aux cercles des rayons AB , Bd , et qui se font équilibre, sont égales entre elles. En prenant pour la coulisse aS toute autre courbe que l'épicycloïde, cette égalité n'aura pas lieu; et néanmoins, quelle que soit cette courbe, les deux cercles des rayons AB , Bd tourneront en même tems, par l'action d'une force appliquée tangentiellement à l'un d'eux.

Substituons au mécanisme de la fig. 1 celui de la fig. 2, le cercle du rayon AB porte une courbe ou coulisse aS : le cercle du rayon Bd est coupé suivant un rayon dSS' qu'on peut considérer comme une autre coulisse ou rainure; enfin, une cheville S est un point mobile qui glisse à-la-fois sur les deux rainures aS , dSS' . Quel que soit le sens dans lequel on fera tourner le premier cercle du rayon AB , la courbe aS fixée à ce cercle poussera la cheville, et la cheville poussera le rayon; d'où il suit que le second cercle tournera; et nommant P et Q les forces tangentes aux deux cercles, qui se font équilibre, on aura, comme précédemment,

$$Pdp + Qdq = 0.$$

Supposons maintenant que l'on demande la nature de la courbe ou coulisse aS , pour que les deux forces P et Q soient égales. On satisfera à cette condition en faisant $dp = dq$, ou (fig. 2) $aa' = S't'$, aa' et $S't'$ étant les arcs infiniment petits décrits dans le même tems par les points a et S' ; l'un de ces points étant la naissance de la courbe aS sur la circonférence du rayon AB ; l'autre, l'extrémité S' de la rainure dS' . Ayant décrit sur Bd , comme diamètre, un cercle, et faisant rouler ce cercle sur le premier cercle donné du rayon AB , le point B engendre l'épicycloïde BS . Cette courbe étant fixée sur le cercle du rayon AB , elle prendra la position aS , et le rayon dS' , entraîné par cette courbe, arrivera dans le même tems, en dSS' . Or, suivant les propriétés de l'épicycloïde, les arcs Ba , BS décrits dans le même tems par les points a et B ,

sont de même longueur, et tous deux égaux à l'arc BS du diamètre Bd . Donc les arcs infiniment petits aa' , $S's'$ décrits dans le même tems, sont aussi de même longueur; donc les forces P et Q qui se font équilibre, sont égales entre elles.

Nous avons considéré deux cercles dont les lignes des pôles sont parallèles; supposons maintenant que ces lignes servant d'axes de rotation se coupent, et comprennent entre elles un angle donné.

Soient (fig. 3, pl. 5) $a'L$, $a'l$ les lignes des pôles de deux cercles des rayons LM , lm ; les longueurs des arcs décrits dans le même tems par les points m et M de ces cercles, sont dans un rapport donné, par exemple de 1 à n , c'est-à-dire, que le point m décrit une circonférence entière du rayon lm , tandis que le point M parcourt la neuvième partie de la circonférence du rayon LM . Ayant partagé l'angle $La'a$ des lignes des pôles en deux autres angles, par une droite $a'B$, telles que les perpendiculaires AB , Ba abaissées d'un point B de cette droite sur les lignes $a'L$, $a'l$ soient dans le rapport de n à 1, on regardera les deux cercles des rayons AB , Ba comme fixés, l'un au cercle du rayon LM , l'autre au cercle du rayon lm , et on ne considérera que la transmission du mouvement circulaire du cercle A , dont le rayon est AB , au cercle du rayon Ba , en observant que ces deux cercles sont tangens l'un à l'autre, et que leurs plans font entre eux un angle ABa , supplément de l'angle $La'a$ formé par les lignes des pôles qui servent d'axes de rotation.

La fig. 4, pl. 5 représente en perspective les deux cercles des rayons AB , Ba qui se touchent au point B , et les lignes des pôles autour desquelles ils doivent tourner, sont les droites La' , la' . Une courbe aSa' , fixée sur le premier cercle, pousse le second cercle par un point S de sa circonférence. Nommant P et Q les forces appliquées tangentiellement aux deux cercles; dp , dq , les petits arcs décrits dans le même tems par les points de tangence, la condition d'équilibre sera $Pdp - Qdq = 0$. Si l'on demande que les forces P et Q soient égales, il faut qu'on ait dans toutes les positions des deux cercles $dp = dq$. On satisfait à cette dernière condition, en prenant pour la courbe aSa' , l'épicycloïde sphérique qui est engendrée par un point du cercle du rayon aB , et qui a pour base (*) le cercle du rayon AB . Si ce dernier cercle a tourné autour de La' d'un arc quelconque Ba , emportant avec lui l'épicycloïde dont l'origine est un point B ; le cercle du rayon Ba décrira dans le même tems autour de la' , un arc BS égal en longueur à l'arc Ba (Traité des machines, chap. 2, art. 17). D'où il suit qu'on aura constamment, arc $Ba =$ arc BS , et $dp = dq$.

(*) On appelle base d'un épicycloïde, le cercle fixe sur lequel roule le cercle mobile.

Le cercle du rayon AB restant le même, substituons au cercle du rayon Ba (fig. 4), un autre cercle du rayon Bd (fig. 5) qui touche le premier au point B , et supposons que les nouveaux axes de rotation soient les lignes des pôles AH , dH , qui se coupent au point H , le mouvement circulaire du premier cercle pourra se transmettre au second cercle par le mécanisme suivant. Ayant fait une rainure suivant un rayon dS' du second cercle, on fixe sur le premier cercle une autre rainure dont la ligne milieu est la courbe aSa' ; une droite inflexible, mobile au tour du point H , passe par le point d'intersection des lignes milieux des deux rainures, et se prolonge au-delà de ce dernier point. Lorsque le cercle du rayon AB tourne, il emporte la courbe aSa' , entraîne la droite inflexible, et cette droite fait tourner le cercle du rayon Bd . Dans ce mouvement, le point commun aux deux rainures et à la verge inflexible décrit le rayon $S'Sd$, en allant du point S' , extrémité de ce rayon, au centre d du cercle; la droite HS' décrit un cône oblique dont le sommet est le point H , et qui a pour base le cercle du diamètre Bd .

Quelle que soit la courbe aSa' , la condition d'équilibre entre les forces P et Q tangentes aux cercles des rayons AB , Bd , sera exprimée par l'équation $Pp - Qdq = 0$, dp et dq étant les petits arcs décrits dans le même tems par les points d'application.

Pour que ces forces soient égales, il faut qu'on ait $dp = dq$, quels que soient les arcs p et q décrits dans le même tems. On satisfait à cette condition en prenant pour la courbe (*) aSa' l'épicycloïde sphérique engendrée par un point d'un cercle qui est situé dans le plan du cercle donné, dont le centre est en d , et dont le rayon ad ou aB est moitié du rayon Bd ; la base de cette épicycloïde est le cercle du rayon AB . Si ce dernier cercle tourne d'un arc Aa , la droite AS décrit dans le même tems la portion de cône oblique qui correspond à l'arc BS . Or, cet arc BS (Traité des machines, chap. 2, art. 8) est de même longueur que l'arc BS' d'un rayon double; donc les deux arcs Ba et BS' ou p et q , décrits dans le même tems par deux points des circonférences des rayons AB , Bd , sont constamment de même longueur.

Quel que soit le mécanisme par lequel on fasse tourner deux cercles, le principe des vitesses virtuelles donne sur-le-champ l'équation de condition qui exprime que les forces appliquées tangentielllement aux cercles sont en équilibre. Il est évident que dans ce cas, les petits espaces parcourus par les points d'applica-

(*) La nature de cette courbe fixée sur le premier cercle, dépend de la forme de la rainure tracée sur le second cercle.

tion des forces, sont dans la direction de ces forces. Si l'on cherchait cette condition d'équilibre par le principe de la composition des forces, le problème serait beaucoup plus compliqué, comme on peut le voir par l'article suivant de M. Ampère, qui a considéré le cas le plus simple, celui de deux cercles situés dans le même plan et tournant autour d'axes parallèles.

« La courbe *OMT* (pl. 4, fig. a) tournant librement autour du point *C'*, est soumise, 1°. à l'action de la force *Q* appliquée à un point fixe *M* de cette courbe, perpendiculairement à *C'M*. 2°. à la pression d'un point pouvant seulement glisser sur cette courbe, lié au centre fixe *C*, actuellement en *M*, et sollicité par la force *P*, perpendiculaire à *CM*.

On demande la relation entre *P* et *Q*, dans le cas de l'équilibre. *MN* étant la normale à la courbe *OMT*, et *P* représentée par *MK* étant décomposée en *MN*, et *MU* détruite par le point *C*,

$MN = \frac{P}{\cos \varphi}$ presse la courbe suivant la normale; cette force étant décomposée suivant *MS*, et *MR* qui est détruite par le point *C'*, on a

$$MS = MN \cos \psi = \frac{P \cos \psi}{\cos \varphi},$$

et il faut pour l'équilibre que $MS = Q$, ce qui donne

$$P \cos \psi = Q \cos \varphi.$$

La même relation se tire du principe des vitesses virtuelles : en effet, la force *Q* (pl. 4, fig. b) étant appliquée à la courbe tournant autour de *C'*, son point d'application reste à la même distance de *C'* en tournant avec elle; il vient donc en *V*, de manière que l'arc *MV* décrit perpendiculairement à *C'M*, est dans la direction de *Q*, dont le moment = $Q \times MV$. Le point lié à *C* où est appliquée *P*, vient en *Z* en glissant sur la courbe, de manière que l'arc *MZ* perpendiculaire à *CM*, est dans la direction de *P*, dont le moment = $P \times MZ$.

La condition l'équilibre est donc $P \times MZ = Q \times MV$. Mais *MY* étant la partie de la normale en *M*, comprise entre les deux positions de la courbe, on a

$$MZ = \frac{MY}{\cos \varphi}, \quad \text{et} \quad MY = \frac{MV}{\cos \psi};$$

la condition de l'équilibre est donc :

$$\frac{P}{\cos \varphi} = \frac{Q}{\cos \psi}, \quad \text{ou} \quad P \cos \psi = Q \cos \varphi,$$

comme ci-devant. »

(Fin de l'article de M. AMPÈRE.)

Sur le cas irréductible, dans les équations du troisième degré ; par M. DE STAINVILLE.

Soit l'équation du troisième degré $x^3 - px + q = 0$; pour démontrer que dans le cas irréductible, les trois racines sont réelles, substituons dans cette équation $r \sqrt{\frac{p}{3}}$ à la place de x ,

on aura une autre équation, qui étant divisée par $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$, sera $r^3 - 3r + \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} = 0$; mais puisqu'on a $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, $\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$ sera

plus petit que 2. Si donc on représente $\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$ par $2u$, u sera

plus petit que l'unité, et la quantité r sera donnée par l'équation $r^3 - 3r + 2u = 0$. Si pour r on substitue successivement les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$, les signes des résultats qui correspondent à ces substitutions seront, lorsque u sera positif $-, +, +, -, +$, et lorsque u sera négatif $-, +, -, -, +$; par conséquent dans le cas où u est négatif, comme dans celui où il est positif, il y aura trois valeurs de r qui satisferont à l'équation $r^3 - 3r + \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} = 0$, et par suite trois valeurs de x qui satisferont à

l'équation $x^3 - px + q = 0$.

Le théorème que nous venons de démontrer, n'est qu'un cas particulier d'un autre théorème plus général, et qui consiste en ce que toute équation de degré impair de la forme $x^m + px + q = 0$ a toujours trois racines réelles, et $m - 3$ imaginaires, lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m$ est égal ou plus petit que zéro, et quelle ne peut avoir qu'une seule racine réelle, lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m$ est plus grand que zéro.

Nous observerons d'abord que l'équation dont il s'agit, ne peut

avoir plusieurs racines réelles, à moins que p ne soit négatif, puisque si cela avait lieu, il y aurait au moins une quantité réelle positive ou négative qui satisferait à l'équation $mx^{m-1} + p = 0$, qui est la dérivée de la proposée, ce qui n'a pas lieu. Lorsque p est négatif, l'équation $x^m + px + q = 0$ ne peut admettre plus de trois racines réelles, puisque si cela avait lieu, la dérivée en admettrait plus de deux, ce qui est impossible.

Si dans l'équation $x^m - px + q = 0$, on fait $x = r \sqrt[m]{\frac{p}{m}}$, on aura une équation qui étant dégagée du coefficient de la plus haute puissance de r , sera $r^m - mr + \frac{q}{\frac{p}{m} \sqrt[m]{\frac{p}{m}}} = 0$, et

comme dans le cas où $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} - \left(\frac{p}{m}\right)^m$ est < 0 , on a

$$\frac{q}{\frac{p}{m} \sqrt[m]{\frac{p}{m}}} < m-1; \text{ on pourra représenter le dernier terme}$$

par $(m-1)\omega$, ω étant plus petit que l'unité : la réalité des trois racines de l'équation proposée dépendra donc de l'existence de trois racines réelles, dans l'équation $r^m - mr + (m-1)\omega = 0$. Si dans cette équation on substitue pour r , 0 et 1, les signes des résultats, lorsque ω est positif, sont de signes contraires. Ainsi l'équation a une racine réelle positive. Si on la divise par le facteur qui correspond à cette racine, on aura une équation de degré pair dont le dernier terme sera négatif, et qui par conséquent aura deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative; ainsi l'équation précédente a trois racines réelles, dont deux seulement sont positives et l'autre négative. Si ω est négatif, la substitution de 0 et de -1 donnant des résultats de signes contraires, l'équation a une racine réelle négative comprise entre ces deux nombres; si on divise l'équation proposée par le facteur qui correspond à cette racine négative, on aura une équation de degré pair, dont le dernier terme sera négatif, et qui par conséquent aura deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative; donc la proposée aura dans le cas de ω négatif comme dans celui de ω positif, trois racines réelles.

Il reste maintenant à considérer le cas où on aurait.....

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} - \left(\frac{p}{m}\right)^m > 0, \text{ ce qui revient à supposer } \omega \text{ plus}$$

grand que l'unité dans l'équation $r^m - mr + (m-1)\omega = 0$. Si dans cette équation on substitue $1 + \delta$ au lieu de r , le résultat sera positif, tant que δ et ω seront positifs; ainsi cette équation ne peut avoir de racines positives, et de plus elle ne peut avoir qu'une seule racine réelle négative, puisque si elle en avait plusieurs, elles seraient en nombre impair, et l'équation dérivée en aurait aussi plusieurs, ce qui est impossible. Si ω est négatif et plus grand que 1, elle ne peut avoir de racines négatives; car si on substitue -1 ou $-1 - \delta$, le résultat sera négatif, et comme elle ne peut avoir de racines positives qu'en nombre impair, et que l'équation dérivée ne peut en avoir plus d'une, il en résulte que le théorème est démontré.

On démontrerait de la même manière que dans le cas de m pair, l'équation ne peut avoir plus de deux racines réelles, et qu'il faut, pour que cela ait lieu, qu'on ait

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m = \text{ou} > 0.$$

Trigonométrie sphérique; par M. PUISSANT.

M. Delambre a publié dans la *Connaissance de Temps*, pour 1809, pag. 445, de nouvelles formules de trigonométrie sphérique, qui ont été démontrées ensuite par plusieurs géomètres, et qui se trouvent l'être fort simplement dans l'*Abrégé d'astronomie* de ce savant célèbre. Voici quelles sont ces formules, en désignant par A, B, C les angles d'un triangle sphérique, et par a, b, c les côtés qui leur sont respectivement opposés,

$$(1) \quad \sin \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$(2) \quad \sin \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}c},$$

$$(3) \quad \cos \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$(4) \quad \cos \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}c},$$

$$(m) \quad \sin^2 \frac{1}{2}C = \frac{\sin \left(\frac{c+b-a}{2}\right) \sin \left(\frac{c+a-b}{2}\right)}{\sin a \sin b},$$

$$(n) \quad \cos^{\frac{1}{2}} C = \frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\sin a \sin b}.$$

On propose de trouver l'expression de l'aire T d'un triangle sphérique en fonction des trois côtés, et ensuite au moyen de deux côtés et de l'angle qu'ils comprennent. Or, on a comme l'on sait (Correspondance, tom. I^{er}, pag. 274),

$$T = A + B + C - \frac{\pi}{2},$$

π étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité. De là

$$\sin \frac{T}{2} = \sin\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right).$$

Développant le second membre, il vient

$$\sin \frac{T}{2} = -\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos \frac{C}{2} + \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin \frac{C}{2},$$

et substituant pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$, et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ leurs valeurs précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \sin \frac{T}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c} [\cos \frac{1}{2} (a-b) - \cos \frac{1}{2} (a+b)] \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\sin \frac{1}{2} c}; \end{aligned}$$

enfin remplaçant $\sin \frac{1}{2} C$ et $\cos \frac{1}{2} C$ par leurs valeurs déduites des relations (m) et (n), et faisant $2s = a + b + c$ pour abrégér, on a

$$\sin \frac{T}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

ce qu'il fallait trouver.

Cherchons en outre l'expression de $\cos \frac{T}{2}$: on a d'abord,

$$\begin{aligned} \cos \frac{T}{2} &= \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos \frac{C}{2} + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Substituant comme ci-dessus pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned}\cos \frac{T}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos^2 \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) + [\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2}(a-b)] \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{\cos \left(\frac{a-b}{2} \right) - 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b (1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C)}{\cos \frac{1}{2} c},\end{aligned}$$

ou bien à cause de $\cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$,

$$\cos \frac{T}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C}{\cos \frac{1}{2} c}.$$

Divisant maintenant la valeur rationnelle de $\sin \frac{1}{2} T$ par celle de $\cos \frac{1}{2} T$, on a pour la seconde expression cherchée,

$$\tan \frac{1}{2} T = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C} = \frac{\tan \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} b \sin C}{1 + \tan \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} b \cos C},$$

et en série

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} T &= \tan \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} b \sin C - \frac{1}{2} \tan^3 \frac{1}{2} b \sin 2C \\ &\quad + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2} a \tan^3 \frac{1}{2} b \sin 3C - \text{etc.}\end{aligned}$$

La valeur précédente de $\cos \frac{T}{2}$ peut se mettre sous une autre forme, ainsi qu'il suit.

De ce que

$$\cos \frac{1}{2} T = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} - \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c},$$

il en résulte, lorsqu'on élimine $\sin^2 \frac{1}{2} C$, que l'on a

$$\cos \frac{1}{2} T = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} - \frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c};$$

mais ainsi $\sin(s-a) \sin(s-b) = \frac{1}{2} (\cos(b-a) - \cos c)$,

$$\cos \frac{1}{2} T = \frac{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a-b) + \frac{1}{2} \cos c}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

et comme $\cos(a-b) = 2 \cos^2 \frac{1}{2}(a-b) - 1$, le numérateur du second membre de cette équation devient

$[\cos \frac{1}{2}(a-b) + \cos \frac{1}{2}(a+b)] \cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2} \cos c + \frac{1}{2}$,
et se réduit à

$$\cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2} \cos c + \frac{1}{2} = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{2};$$

on a donc

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} T &= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant, à l'exemple de M. Legendre (*Géométrie*, note 10), l'expression du rapport $\frac{1 - \cos \frac{1}{2} T}{\sin \frac{1}{2} T}$; nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \frac{1}{2} T}{\sin \frac{1}{2} T} &= \tan \frac{1}{4} T \\ &= \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2} a - \cos^2 \frac{1}{2} b - \cos^2 \frac{1}{2} c + 2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}. \end{aligned}$$

or, le numérateur de cette expression étant le développement de la quantité

$$(1 - \cos^2 \frac{1}{2} a) (1 - \cos^2 \frac{1}{2} b) - (\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} c)^2,$$

il s'ensuit qu'il peut être remplacé par le produit

$$\left\{ \begin{aligned} &(\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} c) \\ &(\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} c) \end{aligned} \right\},$$

ou par cet autre

$$\begin{aligned} &(\cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2} c) (\cos \frac{1}{2} c - \cos \frac{1}{2}(a+b)) \\ &= 4 \sin \frac{1}{2} \sin \left(\frac{s-a}{2} \right) \sin \left(\frac{s-b}{2} \right) \sin \left(\frac{s-c}{2} \right); \end{aligned}$$

mais en général

$$\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \tan \frac{1}{4} x;$$

ainsi nous aurons définitivement la formule suivante due à M. Lhuillier de Genève

$$\tan \frac{1}{4} T = \sqrt{\left(\tan \frac{s}{2} \tan \left(\frac{s-a}{2} \right) \tan \left(\frac{s-b}{2} \right) \tan \left(\frac{s-c}{2} \right) \right)}.$$

Toutes les formules précédentes sont connues; mais la route qui nous y a conduit est nouvelle, et une des plus directes.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES DE PARIS,
ANNÉE 1813.

PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES (*).

On suppose deux cônes droits qui ont même sommet, même hauteur, et des bases égales.

L'un de ces cônes demeurant fixe, l'autre tourne sur lui, de manière que les arcs de la base du cône mobile, s'appliquent sur des arcs égaux de la base du cône fixe.

Dans ce mouvement un point quelconque de la circonférence de la base du cône mobile engendrera une courbe.

On propose de trouver les équations des projections de cette courbe.

Ensuite de prouver que cette courbe se trouve à-la-fois sur une sphère, et sur un cône droit dont il faut aussi trouver les équations.

PROBLÈME DE PHYSIQUE.

Exposer les lois que suit le calorique dans sa transmission, soit par le rayonnement, soit par communication immédiate, et comment son action est influencée par le poli et l'éclat des surfaces.

Les premiers prix de mathématiques et de physique ont été remportés par M. Duflos, élève du lycée Napoléon, admis cette année (1813) à l'Ecole normale.

(*) Voyez la solution synthétique de cette question, Supplément de la Géométrie descriptive, par M. Hachette, art. 100-105.

§. II. SCIENCES PHYSIQUES.

Analyse d'un second mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs ; par M. POISSON ().*

Les expériences de Coulomb ont démontré que dans les corps parfaitement conducteurs, le fluide électrique se porte en entier à la surface, où il forme une couche très-mince qui ne s'étend pas sensiblement dans leur intérieur. L'épaisseur de cette couche, sur un corps de forme donnée, ou sur plusieurs corps soumis à leur influence mutuelle, varie d'un point à un autre suivant une loi que l'analyse mathématique peut seule déterminer. Son application à ce genre de questions est fondée sur un principe général que j'ai établi dans mon premier Mémoire, et qui a également lieu, soit que chacun des corps que l'on considère soit recouvert, dans toute son étendue, par un même fluide, soit qu'au contraire, par suite de leur influence mutuelle, un ou plusieurs d'entre eux soient recouverts en partie par le fluide vitreux, et en partie par le fluide résineux. Voici l'énoncé le plus général de ce principe :

« Si plusieurs corps conducteurs électrisés sont mis en présence les uns des autres, et qu'ils parviennent à un état électrique permanent, il faudra, dans cet état, que la résultante des actions des couches électriques qui les recouvrent, sur un point pris quelque part que ce soit dans l'intérieur de l'un de ces corps, soit égale à zéro. »

Si, en effet, cette force n'était pas nulle, elle agirait sur le fluide naturel que contiennent ces différens corps; une nouvelle quantité de ce fluide serait décomposée, et leur état électrique se trouverait changé. D'ailleurs, quand cette force est nulle, on fait voir aisément que la couche électrique qui recouvre chaque corps, est en équilibre à sa surface; de sorte que notre principe renferme la seule condition à laquelle il soit nécessaire d'avoir égard.

(*) Voyez l'extrait du premier Mémoire sur le même sujet, tome II de la Correspondance, page 468. Le second Mémoire a été lu à l'Institut, le 6 septembre 1813.

On en déduit, dans chaque cas particulier, autant d'équations que l'on considère de corps conducteurs, et que le problème présente d'inconnues. Les équations, pour le cas de deux sphères, sont à différences variables et à deux variables indépendantes; si l'on en considérait trois ou un plus grand nombre, dont les centres ne fussent pas rangés en ligne droite, on serait conduit à des équations du même genre, contenant trois variables indépendantes; et l'on peut remarquer que cette espèce d'équations se présente ici, pour la première fois, dans les applications de l'analyse.

J'ai formé, dans mon premier Mémoire, les équations relatives au cas de deux sphères placées à une distance quelconque l'une de l'autre; et après avoir montré comment on peut les réduire à des équations ordinaires à différences variables et à une seule variable indépendante, je me suis borné à les résoudre complètement dans deux hypothèses particulières: lorsque les deux sphères se touchent, et quand, au contraire, la distance qui sépare leurs surfaces est très-grande par rapport à l'un des deux rayons. Maintenant je reprends la question où je l'avais laissée, et je donne les intégrales générales des deux équations du problème, d'abord sous forme de séries, et ensuite sous forme finie au moyen des intégrales définies. Par la nature de ces équations, leurs intégrales contiennent une fonction arbitraire périodique; ce qui semblerait indiquer que le problème est indéterminé, ou que la distribution du fluide électrique, dont la loi dépend de ces intégrales, peut avoir lieu d'une infinité de manières différentes; mais on démontre rigoureusement que cette fonction est étrangère à la question, et qu'il faut supprimer le terme qui la contient: faisant donc abstraction de ce terme, on obtient des séries qui ne renferment plus que des quantités déterminées, dans chaque cas, par les données de la question, et qui représentent l'épaisseur de la couche électrique, ou, ce qui est la même chose, l'intensité de l'électricité, en tel point qu'on veut sur l'une ou l'autre surface. Excepté le cas où les deux sphères sont très-rapprochées l'une de l'autre, ces séries sont très-convergentes, et comme, d'après l'expression de leur terme général, elles tendent rapidement vers des progressions géométriques, il est facile d'en obtenir des valeurs aussi approchées qu'on le juge convenable. Pour en montrer l'usage, j'ai pris un exemple particulier: j'ai choisi le cas de deux sphères électrisées d'une manière quelconque, dont les rayons sont entre eux comme 1 et 3, et dont les surfaces sont séparées par un intervalle égal au plus petit des deux rayons. On trouvera, dans mon Mémoire, des tableaux qui contiennent les épaisseurs de la couche élec-

trique, calculées, à moins d'un *dix millième* près, en 9 points différens, sur chacune de ces deux sphères, savoir : aux points extrêmes qui tombent sur la ligne des deux centres, et en d'autres points répartis uniformément entre ces extrêmes. L'inspection des tableaux suffira pour montrer si l'électricité croît ou décroît sur l'une des deux sphères, depuis le point le plus rapproché de l'autre, jusqu'au point le plus éloigné; on verra également si l'électricité est par-tout de même nature, ou si elle change de signe sur une même surface; et, dans ce dernier cas, on saura vers quel point tombe la ligne de séparation des deux fluides.

Ces diverses circonstances dépendront des quantités totales de fluide électrique de l'une ou de l'autre espèce, dont les deux sphères sont chargées; on pourra donner à ces quantités telles grandeurs et tels signes que l'on voudra; et si, par exemple, on en fait une égale à zéro, on aura le cas où l'une des deux sphères est électrisée par la seule influence de l'autre, et l'on connaîtra en même tems l'effet de la réaction de la sphère influencée sur la sphère primitivement électrisée. Lorsque c'est la plus petite des deux sphères prises pour exemple, qui est électrisée par influence, la grande présente une circonstance digne d'être remarquée : l'électricité diminue sur sa surface, depuis le point le plus voisin de la petite sphère, jusqu'à environ 75° centigrades de ce point; puis son intensité augmente jusqu'au point diamétralement opposé; de manière que l'épaisseur de la couche électrique, sans changer de signe sur cette surface, atteint son *minimum* vers le 75° . degré. Au reste, en égalant entre elles les épaisseurs qui répondent à deux points différens sur une même sphère, et déterminant par cette équation le rapport des quantités d'électricité dont les deux sphères sont chargées, on pourra produire à volonté un semblable *minimum*, lequel tombera quelque part entre les deux épaisseurs rendues égales. Je donne, dans mon Mémoire, un second exemple de ce *minimum* que je produis en rendant égales les épaisseurs extrêmes sur la petite sphère. Ce cas particulier est encore remarquable en ce que l'épaisseur de la couche électrique est presque constante, et ne varie pas d'un *vingt-cinquième* au-dessus ou au-dessous de la moyenne, dans toute l'étendue de la petite sphère; de sorte qu'elle se maintient en présence de la grande sphère électrisée, à-peu-près comme si elle n'en éprouvait aucune influence; circonstance due, non pas à la faiblesse de l'électricité sur la grande sphère, mais à une sorte d'équilibre entre son action sur la petite et la réaction de celle-ci sur elle-même. On verra aussi que, dans ce cas, l'électricité répandue sur la grande surface, passe du positif au négatif, et éprouve des variations d'intensité très-considérables.

Il serait désirable que l'on pût comparer ces résultats du calcul à des expériences précises, ainsi que je l'ai fait dans mon premier Mémoire, à l'égard des expériences de Coulomb, sur le contact des sphères électrisées; mais je n'ai trouvé, ni ailleurs, ni dans les Mémoires de cet illustre physicien, la suite d'observations nécessaires à cette comparaison. Ces Mémoires ne contiennent qu'un seul fait qui se rapporte à l'influence mutuelle de deux sphères séparées; c'est le phénomène dont j'ai déjà parlé dans mon premier Mémoire, et qui consiste en ce que, si l'on a deux sphères inégales, qui soient d'abord en contact et électrisées en commun, par exemple, positivement; que l'on vienne ensuite à les séparer, et que l'on observe la nature du fluide électrique qui afflue sur l'une et sur l'autre, au point par lequel elles se touchaient, on trouve que ce point, dont l'électricité était nulle pendant le contact, donne, à l'instant de la séparation, des signes d'électricité, contraires sur les deux sphères, savoir, d'électricité positive sur la plus grande, et d'électricité négative sur la plus petite. Celle-ci subsiste jusqu'à ce que les deux surfaces soient à une certaine distance l'une de l'autre; à cette distance, l'électricité du point de la petite sphère le plus voisin de la grande, redevient nulle, comme à l'instant du contact, et au-delà elle passe au positif. La distance dont nous parlons dépend du rapport des deux rayons; Coulomb l'a déterminée par l'expérience pour des sphères de différentes dimensions: je l'ai aussi calculée dans mon premier Mémoire, mais pour le cas seulement où l'un des deux rayons est très-petit par rapport à l'autre; et l'on a vu qu'alors le résultat du calcul est conforme à celui de l'observation. Il paraît difficile de déterminer cette distance *à priori*, lorsque les rayons des deux sphères que l'on sépare ont entre eux un rapport donné; mais quand on l'aura trouvé par l'expérience, il sera toujours facile de vérifier, au moyen de nos formules, si, à cette distance, l'électricité de la petite sphère, au point le plus voisin de la grande, est effectivement égale à zéro. On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, un exemple de cette vérification, faite sur une expérience de Coulomb, et remarquable par l'accord qu'elle montre entre l'observation et la théorie.

Les séries qui représentent les épaisseurs de la couche électrique, cessent de converger, lorsque les deux sphères sont très-rapprochées l'une de l'autre; pour les appliquer à ce cas, il a donc fallu leur donner une autre forme; et en effet, par le moyen de leur expression en intégrales définies, je suis parvenu à les transformer en d'autres séries d'autant plus convergentes que la distance des deux sphères est plus petite. De cette manière, j'ai pu déterminer ce qui arrive dans le rapprochement

de ces deux corps , soit avant qu'ils se soient touchés , soit quand on les a d'abord mis en contact , et qu'on vient ensuite à les séparer.

Dans le premier cas , l'épaisseur de la couche électrique aux points les plus voisins sur les deux surfaces , devient plus grande et croît indéfiniment à mesure que leur distance diminue ; il en est de même de la pression que le fluide exerce contre l'air intercepté entre les deux corps , puisque cette pression , ainsi qu'on l'a vu dans mon premier Mémoire , est toujours proportionnelle au carré de l'épaisseur ; elle doit donc finir par vaincre la résistance de l'air ; et le fluide , en s'échappant sous forme d'étincelle ou autrement , doit passer , avant le contact , d'une surface sur l'autre. Ce fluide , ainsi accumulé avant l'étincelle , est de nature différente et à-peu-près d'égale intensité sur les deux sphères ; si elles sont électrisées , l'une *vitreusement* et l'autre *résineusement* , il est *vitreux* sur la première et *résineux* sur la seconde ; mais quand elles sont toutes deux électrisées de la même manière , et , par exemple , positivement , la sphère qui contient moins de fluide qu'elle n'en doit avoir dans le contact , devient négative au point où se prépare l'étincelle , et , au contraire , celle qui en contient plus qu'elle n'en doit conserver , reste positive dans toute son étendue.

Les phénomènes ne sont plus les mêmes dans le second cas , c'est-à-dire lorsque les deux sphères se sont touchées et qu'on les a ensuite un tant soit peu écartées l'une de l'autre. Le rapport qui existe entre les quantités totales d'électricité dont elles sont chargées , fait disparaître , dans l'expression de l'épaisseur , le terme qui devenait infiniment grand pour une distance infiniment petite : l'électricité des points les plus voisins sur les deux surfaces , est alors très-faible pour de très-petites distances ; elle décroît avec ces distances , suivant une loi que j'ai déterminée ; son intensité est à-peu-près la même sur les deux sphères ; mais quand elles sont inégales , cette électricité est positive sur l'une et négative sur l'autre , et c'est toujours sur la plus petite qu'elle prend un signe contraire à celui de l'électricité totale ; résultat entièrement conforme à l'expérience de Coulomb que j'ai citée plus haut , et qui fournit une confirmation importante de la théorie des deux fluides. Quand les deux sphères sont égales , l'électricité , pendant le contact et après la séparation , se distribue de la même manière sur l'une et sur l'autre ; il est naturel de penser que , dans ce cas , le fluide est de même nature sur toute l'étendue de chaque surface , quelque petite que soit la distance qui sépare les deux sphères : c'est , en effet , ce qu'on déduit de nos formules , en y supposant les deux rayons égaux.

J'ai aussi considéré ce qui arrive, dans le rapprochement des deux sphères, aux points les plus éloignés sur leurs surfaces. On trouvera, dans mon Mémoire, des formules qui expriment, pour des distances très-petites, les quantités d'électricité relatives à ces points; elles montrent que l'épaisseur de la couche électrique qui leur correspond, tend vers une limite constante, à mesure que les deux sphères se rapprochent, et que cette limite est l'épaisseur qui aurait lieu aux mêmes points, à l'instant du contact. Ces mêmes formules font voir en même tems que la quantité qu'elles représentent, converge en général très-lentement vers sa limite; de sorte que, pour des distances extrêmement petites, l'électricité des points les plus éloignés sur les deux surfaces, diffère encore beaucoup de ce qu'elle sera dans le contact ou après l'étincelle; d'où nous pouvons conclure que l'étincelle, quand elle a lieu à une distance sensible, change la distribution du fluide électrique dans toute l'étendue des deux surfaces, et jusqu'aux points diamétralement opposés à ceux où elle se produit.

*Extrait des rapports faits par MM. DELAMBRE et
CUVIER, sur les travaux de la Classe des sciences
physique et mathématiques, pendant l'année 1813.*

Baromètre portatif d'une construction nouvelle; par M. GAY-LUSSAC.

Ce baromètre est à syphon; ce qui le distingue de tous ceux qu'on a connus jusqu'à ce jour, c'est qu'il est entièrement exempt de robinets, de vis ou de pistons. La branche la plus courte est fermée à son extrémité; mais à deux ou trois centimètres au-dessous de cette extrémité, se trouve un petit trou capillaire qui suffit au libre passage de l'air, mais trop petit pour que le mercure puisse s'échapper, même quand il vient à passer sur cette ouverture.

Cette branche est réunie à la plus longue par un tube dont le diamètre intérieur est d'un millimètre environ, et dont la longueur de la courbure est de deux à trois décimètres. Cette disposition a l'avantage que s'il s'engageait de l'air dans la courbure du baromètre pendant le transport, le mercure le chasserait devant lui lorsqu'on renverserait l'instrument, ce qui n'aurait pas lieu si le tube était plus large.

Froid artificiel : cristallisation.

On a vu (Correspondance, tom. 2, pag. 289) comment, en accélérant l'évaporation par le vide et par la présence d'un corps très-absorbant, M. Leslie d'Edimbourg était parvenu à faire congeler l'eau en toute saison. Ce physicien a imaginé depuis un appareil qui a été montré à la classe par M. Pictet, et où l'on peut à volonté, et instantanément, faire congeler l'eau ou lui rendre sa liquidité. Pour cet effet, on place de l'eau sous la cloche pneumatique, dans un vase dont le couvercle se lève ou s'abaisse au moyen d'une tige qui traverse le haut de la cloche; lorsqu'on découvre cette eau, cédant à l'action des causes qui la vaporisent, elle se gèle; et, quand on la recouvre, la chaleur environnante la rend en peu d'instans à son premier état.

Notre confrère M. Gay-Lussac, qui a répété devant la classe l'expérience de M. Leslie, a rappelé un fait bien connu, qui rentre dans le même ordre; c'est le froid qui se produit dans certaines machines d'où on laisse échapper de l'air condensé; il a prouvé qu'en toute saison il suffit que l'air ait été condensé du double pour donner de la glace; et il croit qu'on pourrait s'en procurer aisément ainsi dans les pays chauds, en condensant l'air au moyen d'une chute d'eau.

On peut, en employant des corps plus évaporables que l'eau, arriver à des degrés de froid véritablement étonnans, et à faire geler non-seulement le vif-argent, mais l'esprit-de-vin le plus pur; c'est à quoi est parvenu M. Hutton, d'Edimbourg, qui a remarqué à cette occasion que, dans l'alcool le plus rectifié, la congélation séparait encore des matières assez différentes. M. Confighiacchi, professeur à Pavie, a congelé le mercure par la seule évaporation de l'eau. Nous devons également la première communication de ces expériences à M. Pictet.

On croyait que cette pression de l'air, dont l'influence est si puissante pour retarder l'évaporation des liquides, retardait aussi la dissolution des sels, ou, ce qui revient au même, accélérât leur cristallisation quand ils étaient dissous; et en effet, une dissolution saturée de sel de glauber, ou sulfate de soude qui conserve sa liquidité quand elle refroidit dans le vide, cristallise aussitôt qu'on lui donne de l'air; mais M. Gay-Lussac s'est assuré qu'il s'en faut de beaucoup qu'il en arrive autant à tous les sels, et que même, pour le sulfate de soude, le phénomène ne tient point à la cause qu'on alléguait. Quand on intercepte le contact de l'air par une couche d'huile; par exemple, la cristallisation se retarde comme lorsqu'on supprime sa pression en faisant le vide; tandis qu'au contraire la pression d'une colonne de mercure

n'accélère en rien cette cristallisation. Une dissolution qui traverse du mercure dont l'air a été chassé par l'ébullition, ne cristallise point, et si elle traverse du mercure ordinaire, elle se prend aussitôt. Des secousses, l'introduction d'un petit cristal, et beaucoup d'autres causes, déterminent la cristallisation, quelle que soit la pression. Ainsi, M. Gay-Lussac conclut que ce n'est point par sa pression que l'air diminue le pouvoir dissolvant de l'eau. Il s'est assuré aussi que ce n'est point en absorbant de l'air que l'eau perd de ce pouvoir; mais il pense que c'est un phénomène plus ou moins analogue à celui de l'eau pure, qui, comme on sait, reste liquide à quelques degrés au-dessous de son vrai point de congélation, toutes les fois que l'on peut empêcher qu'elle ne soit agitée, et qui se prend aussitôt qu'on lui imprime le plus léger choc.

Substance nouvelle, découverte par M. COURTOIS.

MM. Clément et Desormes ont montré cette substance à la classe, et M. Gay-Lussac a fait sur elle des expériences instructives. On la retire des eaux mères de la soude du vareck par l'acide sulfurique et la distillation. Refroidie et condensée, elle a le grenu, le brillant et la couleur grisâtre de la plombagine. Tant qu'elle n'a pas été purifiée, elle se fond à soixante-dix degrés de chaleur; mais quand on l'a purifiée en la dissolvant en excès par la potasse, et en la distillant, elle ne fond qu'à une chaleur beaucoup plus forte. Sa propriété la plus frappante est de s'élever en une vapeur, ou plutôt en un gaz du plus beau violet, parfaitement homogène et transparent.

Nouveau Traité de chimie.

M. Thenard a fait paraître le premier volume d'un Traité élémentaire de Chimie, où cette science qui fait journellement tant de progrès, et à qui M. Thenard lui-même en a fait faire de si grands, se trouve exposée dans son état du moment. L'auteur y range les faits d'après le degré de simplicité des corps auxquels ils appartiennent. Après y avoir parlé des agens impondérables, il traite de l'oxygène et de la théorie de la combustion, et passe ensuite aux corps combustibles, à leurs combinaisons entre eux, et à celles qu'ils contractent un à un avec l'oxygène. Ces dernières se divisent, selon leurs propriétés, en oxides et en acides, et les acides fluorique et muriatique y sont rangés d'après les idées ordinaires qui en font des corps oxygénés. C'est à eux que s'arrête cette première partie d'un ouvrage que la marche rapide de la science a rendu nécessaire sitôt après d'autres bons ouvrages sur le même sujet, et dont on ne peut que désirer vivement la prompte terminaison. (Fin de l'extrait.)

Note sur la polarisation de la lumière électrique ;
par M. HACHETTE.

Un corps faiblement électrisé ne présente aucun phénomène lumineux ; en augmentant la tension du fluide électrique sur ce même corps , la lumière devient sensible. Cette lumière est-elle un élément particulier du fluide électrique , ou le fluide électrique même ? ne diffère-t-elle pas de la lumière émanée du soleil , ou n'en est-elle qu'une modification ?

Cette question est restée jusqu'à présent indécise. On lit dans l'Histoire de l'électricité , de Priesteley , le passage suivant : (Traduction française de 1711 , tom. III , pag. 448.)

Observations sur les couleurs de la lumière électrique.

Voyant que plusieurs électriciens ont avancé dans leurs écrits que la lumière électrique ne contenait pas les couleurs prismatiques, j'eus la curiosité d'essayer un fait si extraordinaire, et aussitôt je m'aperçus de l'illusion de l'expérience que l'on avait faite la première fois, et de la cause de cette illusion. En tenant un prisme devant mes yeux , tandis que l'on tirait des étincelles électriques au principal conducteur , je remarquai d'aussi belles couleurs prismatiques que puisse en donner l'image du soleil ; mais quand la lumière fut un peu étendue , comme dans les parties rouges et pourpres d'une longue étincelle , ces couleurs ne furent plus si vives , et on les distingua moins facilement les unes des autres , et quand la lumière fut encore plus étendue , comme dans le vide , le prisme ne fit aucun changement sensible dans son apparence (*). C'est ainsi que la partie du milieu d'un grand objet quelconque , paraît au travers d'un prisme de sa couleur naturelle ; car quoique les rayons soient réellement séparés , ils sont sur-le-champ confondus avec d'autres , qui viennent de différentes parties du même objet ; de sorte qu'il en doit nécessairement résulter sa couleur naturelle.

Comme les flammes de différens corps donnent les couleurs prismatiques , dans des proportions très-différentes , j'ai souvent essayé d'entreprendre de déterminer la proportion de ces couleurs dans la lumière électrique , et de la comparer avec la proportion des couleurs , venant de la lumière qu'on pourrait se procurer de différentes autres manières. Cela déterminerait peut-être ce que c'est

(*) Ce changement est au moins aussi sensible dans le vide que dans l'air.

que cette *matière hétérogène*, qui est mise en action par le passage rapide du fluide électrique, et qui est la cause de la lumière, de l'odeur, et des autres *qualités* sensibles de l'électricité.

Le traducteur ajoute la note suivante, relative à cette dernière phrase ; « ce n'est point une matière hétérogène, mise en action par le fluide électrique qui produit la lumière ; c'est le fluide électrique lui-même, qui s'enflamme par le choc de ses propres rayons. A l'égard de l'odeur, elle est produite par une matière jusqu'à présent inconnue. »

« Dans un Mémoire de Wollaston sur la réfraction et la dispersion de la lumière, imprimé dans les Transactions philosophiques, année 1802, on lit le passage suivant : « En regardant une ligne bleue de la lumière électrique, j'ai trouvé que le spectre était aussi séparé en plusieurs images ; mais les phénomènes diffèrent un peu des précédens. Il serait inutile de s'attacher à décrire en détail les apparences qui varient suivant l'éclat de la lumière : je n'entreprendrai point de les expliquer. » (*Voyez Annales de chimie*, tom. XLVI, pag. 61.)

En 1805, M. Biot a émis cette opinion très-ingénieuse, que la lumière électrique lui paraissait le simple résultat de la compression que l'air et les vapeurs éprouvent, quand elles sont traversées par l'électricité. (*Voyez les Annales de chimie*, 21 mars 1803, tom. LIII, pag. 321 ; et la Physique mécanique de Fischer, 2^e. édition, note de la pag. 247.) Pour admettre cette opinion, il faut supposer que lorsque l'air ou les vapeurs sont très-rares, comme dans le vide des bonnes machines pneumatiques, ou du tube barométrique ; le même volume de gaz devient une source de lumière, en prenant aux corps environnans du calorique, et en transformant ce calorique en lumière ; ce qui n'est pas encore démontré, et d'ailleurs, ne s'accorde pas avec les expériences de M. de Saissy, qui semblent prouver que le gaz oxygène est le seul gaz qui devienne lumineux par compression.

En novembre 1812, je répétais les expériences de Priestley et de Wollaston, dont je n'avais pas alors connaissance, et j'y ajoutai ce fait que j'ai communiqué à la Classe des sciences physiques, que la lumière électrique se polarise sous le même angle que la lumière solaire ; ce qui paraît confirmer que ces deux lumières sont identiques, ou qu'elles ne diffèrent entre elles que par de légères modifications.

*Expériences sur la polarisation de la lumière électrique.*I^{re}. EXPÉRIENCE.

On place sur le conducteur d'une machine électrique, un bout de fil de fer d'un petit diamètre, coupé perpendiculairement à sa longueur; on observe la lumière qui se dégage de ce fil de fer, avec un prisme de cristal de roche à faces parallèles et à double réfraction. Quelle que soit la position de la section principale du prisme par rapport à la lumière blanche électrique, on voit deux images de l'extrémité du fil de fer; mais si l'on place près de ce fil, une lamie de verre, disposée de manière qu'elle réfléchisse la lumière sous un certain angle, cette lumière réfléchie est polarisée, c'est-à-dire, qu'étant vue à travers le prisme dans le plan de la section principale; elle ne présente plus qu'une seule image. On polarise de la même manière la lumière purpurine électrique du vide.

II^e. EXPÉRIENCE.

On place à l'extrémité du fil de fer de l'expérience précédente, le bout de la flamme d'une bougie, et on cherche la position de la glace, qui convient à la polarisation de cette flamme. Ayant enlevé la bougie, on fait tourner le plateau de la machine électrique, qu'on suppose toujours dans un lieu obscur, et la lumière électrique blanche ou purpurine, est aussi dans la position la plus avantageuse pour la polarisation.

Notice historique sur la composition de l'eau.

Extrait d'une lettre insérée dans le journal de Paris, du 8 novembre 1813.

On regarde la *composition de l'eau* comme la découverte la plus importante de ce siècle dans les sciences physiques. L'histoire des progrès de la physique, dont vous parlez dans votre feuille de ce jour, cite Cavendish, comme l'unique auteur de cette découverte; les Français peuvent aussi en réclamer l'honneur. On lit page 41, quatrième volume de l'ouvrage de M. Libes, que ce fut le 15 juillet 1784, que Cavendish annonça à la société royale que l'air inflammable allumé par l'étincelle électrique, brûlait dans des vaisseaux clos, en lui fournissant successivement l'air vital nécessaire à sa combustion, qu'il en absorbait une quantité déterminée, et que le résultat était de l'eau, dont le poids égalait celui des deux airs évanouis. La note, page 203 du même volume, apprend que

Cavendish a fait toutes ses expériences sur l'explosion des gaz hydrogène et oxygène pendant l'été de 1781.

Il est bien notoire que dès 1780, M. Monge, professant la physique à l'école du génie de Mézières, répétait l'expérience du pistolet de Volta, en plongeant dans l'eau l'orifice du pistolet fermé par un bouchon, et il faisait observer à son auditoire qu'après la décharge de la bouteille de Leyde, le vase se remplissait d'eau; d'où il concluait que les deux airs contenus dans le vase servant de pistolet, se combinaient et formaient un liquide. L'appareil propre (*) à recueillir ce liquide et à mesurer les quantités de gaz employés, n'a été disposé qu'en 1783. Le Mémoire de M. Monge, contenant le résultat des expériences faites avec cet appareil, a été lu à l'académie de Paris en juin 1783, et imprimé quelques années après dans le volume de cette académie, année 1783. Les premières expériences de M. Monge sont donc au moins aussi anciennes que celles de Cavendish, et son Mémoire est antérieur d'environ sept mois.

Quant aux expériences de Lavoisier sur la composition de l'eau, elles ont été communiquées à l'académie de Paris en novembre 1783 et avril 1784; et c'est par une circonstance particulière qu'elles ont été publiées dans le volume de 1781, environ deux ans avant l'impression du volume, année 1783, qui contient le Mémoire de M. Monge.

Pour ne rien laisser desirer sur cette partie intéressante de la physique, je rapporterai le passage suivant de l'éloge de M. Cavendish, par M. le chevalier Cuvier, secrétaire perpétuel de l'Institut :

« Ce grand phénomène (la composition de l'eau) que M. Cavendish avait mis trois années à constater, fut annoncé à la société royale, le 14 janvier 1784. Notre confrère (M. le comte de Peluse) Monge, qui avait eu la même idée, et fait de son côté les mêmes expériences que M. Cavendish, en communiqua à-peu-près vers le même tems le résultat à Lavoisier et à M. le comte de Laplace. »

Problème de physique, proposé par M. BIOT.

M. Charles s'est servi depuis longtems dans ses cours d'un instrument qu'il appelle *hydromètre thermométrique*, et qui n'est autre chose qu'un grand aréomètre de verre très-mince, que l'on

(*) On conserve dans le cabinet de physique de l'Ecole Polytechnique, les vases de cet appareil.

a rendu extrêmement sensible en lui donnant un col très-fin. On a tracé sur ce col un trait pour servir de marque constante, et lorsqu'on plonge l'instrument dans l'eau distillé à diverses températures, on trouve qu'il faut placer sur son chapeau, des poids divers pour le faire enfoncer jusqu'à la marque.

Cela posé, on donne 1°. le poids P de l'instrument réduit au vide; 2°. le poids additionnel p , qu'il a fallu mettre sur son chapeau pour le faire enfoncer jusqu'à la marque, lorsqu'il était plongé dans l'eau distillée à la température t ; et on demande 1°. de déterminer par le calcul tous les autres poids additionnels qui conviendront à une autre température assignée; 2°. de déterminer à quelle température l'instrument s'enfoncera de lui-même sans qu'il soit besoin d'y ajouter aucun poids.

Ceci suppose que l'on connaît les dilatations de l'eau et du verre. D'après les expériences de MM. Lavoisier et Laplace, la dilatation cubique du verre est 0,00003284 pour un degré de Réaumur, et on peut la supposer proportionnelle à la température comptée depuis zéro. La dilatation de l'eau est variable, et en nommant t la température mesurée par le thermomètre à mercure, on peut la représenter par

$$at + bt^2 + ct^3,$$

a, b, c étant des coefficients constans, dont les valeurs sont,

$$a = - 0,000054878,$$

$$b = + 0,0000101595,$$

$$c = - 0,000000027080.$$

On peut même supposer que le poids de l'hydromètre réduit au vide n'est pas connu, et qu'on a seulement son poids dans l'air, et son poids additionnel p dans l'eau, à la température de 5° de Réaumur, voisine du *maximum* de condensation; car avec cette donnée, on peut calculer d'une manière suffisamment exacte, la réduction au vide en s'appuyant sur ce résultat, qu'à la température de la glace fondante et sous la pression de 0^m,76, le poids d'un centimètre cube d'air atmosphérique sec, est à Paris de 0,001299541 gramme.

Pour appliquer ces résultats à un exemple, on peut choisir l'instrument même de M. Charles.

Son poids dans l'air est 90,303 grammes; lorsqu'il est plongé dans l'eau distillée à la température de 5° de Réaumur, il faut pour le faire enfoncer jusqu'à la marque, ajouter sur son chapeau un poids de 1,330 gramme.

Classe des sciences physique et mathématiques de l'Institut.

Sujets des prix proposés pour les années 1815 et 1816.

- 1^{er}. Théorie des oscillations des lames élastiques.
- 2^e. Théorie de la propagation des ondes, à la surface d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie.

Chaque prix est une médaille d'or de 3000 francs. Les mémoires de concours ne seront reçus que jusqu'au 1^{er}. octobre de l'année 1814 pour le premier prix, et de l'année 1815 pour le second.

§. III.

Projets et Notices sur les travaux hydrauliques des environs de Paris, dirigés par MM. les Ingénieurs des ponts et chaussées.

Projet pour l'établissement d'une gare à Choisy. — Notice descriptive du pont de Choisy ; par M. Navier. 1 vol. in-4^e, mai 1811, avec quatre planches, dont l'une représentant les environs de Paris, est jointe à ce cahier.

Canal de l'Ourcq.

Rapport à l'assemblée des ponts et chaussées, sur le projet général du canal de l'Ourcq ; par M. Girard (octobre 1803).

Résumé du rapport.

1^o. Le canal de l'Ourcq remplira en même tems les fonctions d'un aqueduc, et celle d'un canal de navigation ;

2^o. Envisagé sous le premier point de vue, le canal de l'Ourcq doit amener des eaux salubres dans la capitale, et pour être telles, leur vitesse ne peut être moindre de 35 centimètres par seconde ;

3^o. Considéré comme navigable, le canal de l'Ourcq doit conserver sur toute sa longueur, une hauteur d'eau constante, sans le secours d'écluses, n'y d'aucun autre barrage ;

4^o. La plus grande quantité d'eau sur laquelle on puisse compter pour alimenter ce canal, sera de 13500 ponceaux, ou de 250820 kilolitres par 24 heures ;

5^o. La prise de la rivière d'Ourcq sera faite dans le bief supérieur du moulin de Mareuil, à 96 kilomètres de la barrière de Pantin ;

6^o. La pente totale de ce canal de dérivation entre ses deux extrémités est de 10,14 mètres. (Voyez la carte, pl. 6.)

Sur la quantité d'eau amenée à Paris par les aqueducs, ou par les machines.

M. Deparcieux pensait qu'il fallait au moins un pouce d'eau (ou 19047 litres par 24 heures) pour mille habitans. Dans un Mémoire qu'il a écrit en 1762 sur la possibilité d'amener à Paris les eaux de l'Yvette, il estime la population de Paris de 800 mille habitans : à cette époque, on y amenait au plus 230 pouces, savoir :

1°. Par la pompe du pont Notre-Dame, de 100 à 125 pouces, au plus	125 p ^{ces} .
2°. Par Arcueil, de 40 à 50 pouces.	50
3°. Par la Samaritaine, de 25 à 30 pouces.	30
4°. Par les sources du pré St.-Gervais.	15
5°. Par Belleville.	10

Suivant M. Deparcieux, 1762 230 p^{ces}.

En 1777, MM. Perrier obtinrent un privilège pour l'établissement de pompes à feu qui devaient élever de différens points de la Seine, environ 26000 kilolitres d'eau (environ 1366 pouces) en 24 heures. 1366 p^{ces}.

TOTAL 1596 p^{ces}.

Le seul canal de l'Ourcq doit amener à Paris . . . 13500 p^{ces}.

Canal Saint-Maur, sur la Marne. (Voy. pl. 6, CD.)

Le projet de construire à Saint-Maur, près de Paris, un canal de navigation, fut conçu par M. le chevalier Bruyère, maître des requêtes et directeur des travaux publics. Un décret impérial du 29 mars 1809 en ordonna l'exécution. Des dispositions préliminaires commencèrent au mois d'août de la même année ; mais ce ne fut qu'en 1811 que les travaux furent poussés avec une grande activité.

Le canal, dont la direction est du nord au sud, raccourcit la navigation de la rivière de la Marne d'environ quatre lieues. Il est composé de deux parties : la première, qui traverse une butte, présente une galerie souterraine de la longueur de 600 mètres ; la seconde, à ciel ouvert, et qui se trouve dans les prairies de la commune de Saint-Maurice, a la même longueur. On construira, de chaque côté de cette partie du canal, des moulins à moudre les

blés pour l'approvisionnement de Paris. Le canal servira également de gare aux bateaux pendant l'hiver.

Le canal souterrain est formé par une voûte, en plein cintre, de 5 mètres de rayon. La largeur est de 8 mètres. Une grande partie du parement est en meulieres, et l'autre en moëllons piqués. On regrette que cette voûte ne soit pas en pierres de taille.

Le chemin de hallage, établi sur la rive droite, a 2 mètres de largeur; il s'élève à 5 mètres au-dessus du fond du canal.

Les pieds droits de la voûte sont taillés dans une masse de pierre: il ne reste plus, pour l'achèvement du canal souterrain, à l'intérieur, que l'enlèvement des déblais provenant de cette masse qui a environ 400 mètres de longueur sur 5 de hauteur. Pour la faire disparaître, on emploie de la poudre: on casse ensuite les blocs avec des masses et des coins de fer.

L'extrados de la voûte est couvert d'une chappe, composée de mortier et de pierres de meulieres concassées, et sur laquelle on a établi une couverture en tuiles fixées avec du ciment. Une couche de sable étendue sur cette couverture, facilite l'écoulement des eaux pluviales; des remblais placés sur le sable forment une route ou avenue plantée d'arbres et qui régnera sur toute la longueur du canal souterrain.

La plus grande profondeur des fouilles pour la partie souterraine, c'est-à-dire depuis le point le plus élevé de la butte jusqu'au fond du canal, est de 80 pieds; et la largeur, dans le haut de la butte, d'environ 60 pieds.

Le canal à ciel ouvert est construit de chaque côté en pierres de meulieres. L'extrémité méridionale sera terminée par une écluse qui rachètera une pente de 12 pieds.

A l'entrée du canal souterrain, au nord, est une porte de garde destinée à empêcher les grandes eaux et les glaces d'entrer dans ce canal. La voûte a été achevée le 17 septembre 2813. Ce canal pourra être achevé et livré au commerce dans deux ans.

Renseignemens communiqués par M. H.-C. EMERY, ancien élève de l'Ecole polytechnique, ingénieur des ponts et chaussées.

I^{er}. Pente de la Marne.

1°. Le contour de la Marne dans le développement de cette rivière, compris entre les deux extrémités du canal et mesurée exactement, a donné 12000 mètres.

n°. La pente totale de la Marne, sur toute cette longueur, est de 5.50 mètres, ce qui donne 0.271 de pente par 1000.00 mètres. C'est cette différence de niveau qui forme la chute du canal de Saint-Maur à son écluse d'aval.

II°. Section de la Marne.

Les expériences pour la section et la vitesse de la Marne, ont été faites dans une partie de cette rivière de 250 mètres de longueur, en ligne droite, et située en amont de la grande Ile attenant au pont de Saint-Maur.

Le pertuis étant ouvert et les eaux étant à l'étiage, on a trouvé,
 La section de 200.00 mètres carrés,
 La largeur en gueule 65.00 mètres.
 La hauteur d'eau de la section 3.30 mètres.

Nota. Lorsque le pertuis est fermé, il résulte environ 0.20 mètre d'augmentation de hauteur d'eau.

III°. Vitesse de la Marne.

1°. *Expérience.* Le pertuis étant *bouché*, et la crue des eaux étant de 0.16 au-dessus de l'étiage;

Quatre expériences ont été faites avec des boules de cire, dans le milieu de la rivière.

Les boules ont employé pour parcourir 250 mètres, un tems réduit de 10' — 40".

La vitesse à la superficie donnée par les expériences était donc de 0.391 par seconde.

2°. *Série d'expériences.* Le pertuis étant *ouvert*, et la crue des eaux étant de 0.50 au-dessus de l'étiage;

Dix-huit flotteurs placés sur différens points de la rivière, ont employé pour parcourir 250.00 mètres, un tems réduit de 9'—31".

La vitesse à la superficie donnée par ces expériences était donc de 0.438 par seconde.

3°. *Série d'expériences.* Le pertuis étant ouvert, et la crue des eaux étant de 0.36 au-dessus de l'étiage;

La première expérience a été faite sur la rive gauche de la rivière, à 4.00 mètres de distance du bord; la boule de cire a employé 16' à parcourir 250.00 mètres : *vitesse par seconde* 0.26 mét.

Les 2°, 3°, 4°. et 5°. expériences ont été faites à 14.00 mètres, 24.00 mètres, 34.00 mètres, 44.00 mètres du bord.

Elles ont peu différé les unes des autres; la réduite a été 8'—36". Ce qui présenterait une vitesse à la superficie de 0.484 par seconde.

La 6^e. expérience essayée à 54.00 mètres de distance du bord, n'a pu être faite que sur 200.00 mètres.

Sur cette longueur, la vitesse de la boule a été de 0.359. A la distance de 200.00 mètres, la boule a été arrêtée par des herbes qui indiquaient un haut-fond.

IV^e. Renseignemens divers sur le canal de Saint-Maur.

1^o. La largeur de passage de la cunette du souterrain, est de 8.00 mètres;

2^o. La hauteur d'eau, à la porte de garde et sur le busc de cette écluse, doit être dans les plus basses eaux de 1.00.

Cette section sera augmentée par un barrage qui sera probablement construit en aval de la prise d'eau, et qui soutiendra les eaux à 0.50 au-dessus de l'étiage;

3^o. Les eaux seront soutenues à la hauteur de la Marne supérieure, dans toute la longueur du canal, et jusqu'à l'écluse placée à l'extrémité aval de cette dérivation;

4^o. Section moyenne de la Marne 200.80 mètres carrés.
Vitesse moyenne, par seconde. 0.343 mètre.
Produit dans les basses eaux, par seconde. . 68.87 mètres cubes.

ANNONCE D'OUVRAGES.

Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le Conseil de l'instruction de cet établissement, XVI^{me}. cahier. 1 vol. in-4^o., imprimerie impériale 1813.

Ce cahier contient, 1^o. Théorie mathématique de l'action capillaire; par M. *Petit*;

2^o. Deux Mémoires de M. *J. Binet*, l'un sur la Théorie des momens d'inertie des corps, l'autre sur un Système de formules analytiques;

3^o. Trois Mémoires de M. *Cauchy*, les deux premiers sur les polyèdres, le troisième sur les nombres;

4^o. Deux Mémoires de M. *Poisson*, l'un sur les intégrales définies, l'autre sur un cas particulier du mouvement de rotation des corps pesans;

5^o. Un Mémoire sur le contact des sphères, annoncé page 368 du 2^e. volume de la Correspondance; par M. *Gaultier*, de Tours;

6^o. Théorie et description de l'héliostate; par M. *Hachette*.

Exposition très-abrégée de l'Art de la guerre ; par M. *Duhays*, ancien chef de bataillon du génie, instituteur à l'Ecole Polytechnique. 1 vol. in-8°. , sans planches. Paris 1813.

Nouveau précis des Leçons d'architecture, données à l'Ecole impériale Polytechnique ; par M. *J.-N.-E. Durand*. 1 vol. in-4°. , contenant 32 planches. Paris 1813.

Lettres à une princesse d'Allemagne, sur divers sujets de physique et de philosophie ; par M. *Léonard Euler* ; conforme à l'édition original de l'académie des sciences de Saint-Petersbourg : revue et augmentée de diverses notes ; par M. *J.-B. Labey*, docteur ès-sciences de l'Université impériale, instituteur à l'Ecole Polytechnique, etc. — Précédée de l'éloge d'Euler ; par M. *de Condorcet*. 2 vol. in-8°. Paris 1812. Ces lettres ont été écrites à Berlin, du 19 avril 1760 au 18 mai 1762, pour madame la princesse d'*Anhalt-Dessau*, nièce du roi de Prusse. Euler né à Bâle, le 15 avril 1707, est mort à Saint-Petersbourg, le 7 septembre 1783.

Développemens de géométrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc. Pour faire suite à la Géométrie descriptive, et à la Géométrie analytique de M. Monge ; par M. *Ch. Dupin*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, membre de plusieurs sociétés savantes, capitaine du génie maritime. 1 vol. in-4°. Paris 1813, dédié à M. Monge, membre de l'Institut.

Cet ouvrage comprend cinq Mémoires.

1^{er}. *Mémoire*. Osculation des surfaces ; courbure des surfaces et de celle de leurs sections ; théorie des tangentes conjuguées.

2^e. et 3^e. *Mémoires*. Théorie des tangentes conjuguées ; de l'indicatrice.

4^e. *Mémoire*. Propriétés générales des surfaces trajectoires orthogonales, relatives à la courbure des surfaces.

5^e. *Mémoire*. Théorie des surfaces trajectoires orthogonales ; appliquée à la détermination des lignes de courbure.

Ces Mémoires présentés à l'Institut en décembre 1812, ont été déclarés dignes de l'approbation de la Classe des sciences physique et mathématiques.

Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois, avec des applications aux constructions en général, et spécialement à la construction des vaisseaux, faites dans l'arsenal de la marine française, à Corcyre, en 1811; par M. *Ch. Dupin*, capitaine en premier au corps du génie maritime.

Premier mémoire, présenté à la Classe des sciences physiques et mathématiques, et approuvé le 19 juillet 1813.

Ce Mémoire paraîtra dans le XVII^e. cahier du journal de l'Ecole qui est sous presse.

Essai sur la science des machines; par M. *A. Guenyeau*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, ingénieur des mines.

Des moteurs; des roues hydrauliques; des machines à colonnes d'eau; du béliet hydraulique; des machines à vapeurs; des hommes et des animaux. 1 vol. in-8°. de 287 pages. Lyon 1810.

Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, seconde édition. 1 vol. in-8°. 1813; par M. *Carnot*, membre de la légion d'honneur; de l'Institut impérial de France; du conseil de perfectionnement de l'Ecole Polytechnique, etc. 1 vol. in-8°. Paris 1813.

Calcul différentiel et intégral, 2^e. édition, 2^e. vol., 1814; par M. *F.-F. Lacroix*.

Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie; par *le même*, 6^e. édition, revue et corrigée. 1 vol. in-8°. Paris 1813.

(Voyez l'annonce des autres ouvrages de M. Lacroix, pag. 479, 2^e. vol. de la Correspondance.)

Application de l'algèbre à la géométrie; Traité des surfaces du second degré; par MM. *Monge* et *Hachette*. 1 vol. in-8°. Paris 1813.

Traité de chimie élémentaire, théorique et pratique; par M. *L.-J. Thenard*, professeur à l'Ecole impériale Polytechnique; etc., premier et deuxième volumes.

Les 31 planches jointes à ces deux premiers volumes, ont été dessinées par M. Girard, qui avait déjà donné des preuves de son talent pour la description graphique des appareils de chimie ou physique, dans le Manuel de chimie de M. Bouillon-Lagrange.

DESCRIPTION DE L'ÉGYPTE.

On a publié dans le premier volume de la Correspondance, pag. 459, les noms des personnes attachées à l'École Polytechnique, qui ont fait partie de l'expédition d'Égypte, sortie de Toulon le 18 mai 1798, sous le commandement du général en chef Bonaparte; on a omis de citer M. Costaz, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, et M. Lepère, adjoint à l'inspecteur des études. Le gouvernement a, par un décret du 6 février 1802, nommé une commission séant à Paris, pour réunir tous les matériaux recueillis en Égypte, sur l'administration, les arts et les sciences. Le 21 mai suivant, S. E. le ministre de l'intérieur, Chaptal, a pris un arrêté qui organise les travaux de cette commission (1). Nous allons faire connaître les titres des Mémoires contenus dans les deux premières livraisons de la description de l'Égypte, et dont les auteurs ont été, pour la plupart, ou élèves de l'École Polytechnique, ou attachés à cet établissement. A la lecture de ces Mémoires, on sera pénétré de reconnaissance et d'admiration pour les savans et les artistes qui, sur le théâtre même de la guerre, ont recueilli des matériaux aussi précieux et en aussi grand nombre, tant sur l'histoire ancienne que sur la géographie.

Première livraison, publiée en janvier 1808 et mars 1810; 1300 pages de texte grand in-folio, et 170 planches grand atlas.

DESCRIPTION D'ANTIQUITÉS.

Description de l'île de Philæ; par feu *Michel-Ange Lancret*.

Description de Syène et des cataractes; par *E. Jomard*.

Description de l'île d'Éléphantine; par *le même*.

Description d'Ombos et des environs; section 1^{re}, par *le même*,
section 2^e, par *Rozière*.

Description des antiquités d'Edfoû; par *E. Jomard*.

Description des ruines d'El-Kâb ou Elethyia; par *Saint-Genis*.

Description d'Esné et de ses environs; par *Jollois et Devilliers*.

Description d'Erment ou Hermonthis; par *E. Jomard*.

Note sur les restes de l'ancienne ville de Buphium, faisant suite au chap. VIII; par *Costaz*.

(1) *Président de la commission*, M. Berthollet.

Secrétaire, M. Jollois.

Commissaire du gouvernement, M. Jomard.

MÉMOIRES D'ANTIQUITÉS.

Mémoire sur le Nilomètre de l'île d'Eléphantine, et les mesures égyptiennes; par M. *Girard*.

Mémoire sur l'agriculture, sur plusieurs arts, et sur plusieurs usages civils et religieux des anciens Egyptiens; par M. *Costaz*.

Mémoire sur le lac Moëris comparé au lac du Fayoum; par M. *E. Jomard*.

Mémoire sur les vases murrhins qu'on apportait jadis d'Egypte, et sur ceux qui s'y fabriquaient; par M. *Rozière*.

De la géographie comparée, et de l'ancien état des côtes de la Mer-Rouge, considérés par rapport au commerce des Egyptiens dans les différens âges; par *le même*.

Mémoire sur le zodiaque nominal et primitif des anciens Egyptiens; par M. *Remi Raige*.

Dissertation sur les diverses espèces d'instrumens de musique que l'on remarque parmi les sculptures qui décorent les antiques monumens de l'Egypte, et sur les noms que leur donnèrent, en leur langue propre, les premiers peuples de ce pays; par M. *Villoteau*.

MÉMOIRES D'ÉTAT MODERNE.

Nota. Voyez la table générale de l'état moderne, 2^e. livraison.

HISTOIRE NATURELLE.

Histoire naturelle des poissons du Nil; par M. *Geoffroy-St.-Hilaire*.

Description du palmier doum de la Haute-Egypte, ou *cucifera Thebaïca*; par M. *Delile*.

Réflexions sur quelques points de comparaison à établir entre les plantes d'Egypte et celles de France; par feu M. *Coquebert*.

Système des oiseaux de l'Egypte et de la Syrie; par *Jules-César Savigny*.

Seconde livraison, publiée en mars 1813; 1500 pages de texte grand in-folio, et 273 planches grand atlas.

DESCRIPTION D'ANTIQUITÉS.

Description générale de Thèbes :

Introduction, par MM. *Jollois et Devilliers*.

Section 1^{re}. Description des édifices de l'hippodrome de Medyn et Abou; par *les mêmes*.

- Sect. II. Description des colosses de la plaine de Thèbes et des ruines qui les environnent, et recherches sur le monument dont ils faisaient partie ; par *Jollois et Devilliers*.
- Sect. III. Description du tombeau d'Osymandias , désigné par quelques voyageurs, sous la dénomination de *Palais de Memnon* ; par *les mêmes*.
- Sect. IV. Description du temple de l'ouest, ou du temple d'Isis ; par *les mêmes*.
- Sect. V. Description des ruines situées au nord du tombeau d'Osymandias ; par *les mêmes*.
- Sect. VI. Description des ruines de Qournah ; par *les mêmes*.
- Sect. VII. Description des ruines de Louqsor ; par *les mêmes*.
- Sect. VIII. Description du palais , des propylées , des avenues de sphinx , des temples , et de diverses autres ruines de Karnak ; par *les mêmes*.
- Sect. IX. Description des ruines de Med-Amoud ; par *les mêmes*.
- Sect. X. Description des hypogées de la ville de Thèbes ; par *E. Jomard*.
- Sect. XI. Description des tombeaux des rois ; par *M. Costaz*.
- Dissertation sur la position géographique et l'étendue de Thèbes , et recherches historiques relatives à cette ancienne capitale ; par *MM. Jollois et Devilliers*.

APPENDICE AUX DESCRIPTIONS.

- N^o 1. Description des carrières qui ont fourni les matériaux des monumens anciens , avec des observations sur la nature et l'emploi de ces matériaux ; par *M. Rozière*.
- N^o 2. Description des monumens astronomiques découverts en Egypte ; par *MM. Jollois et Devilliers*.

MÉMOIRES D'ANTIQUITÉS.

- Notice sur les embaumemens des anciens Egyptiens ; par *J.-C. Rouyer*.
- De la géographie comparée, et de l'ancien état des côtes de la Mer-Rouge , considérés par rapport au commerce des Egyptiens dans les différens âges (seconde partie) , par *M. Rozière*.
- Notice sur la branche canopique ; par feu *Michel-Ange Lancret*.

Observations astronomiques faites en Egypte pendant les années 1798, 1799 et 1800; par M. *Nouet*.

Mémoire sur la communication de la mer des Indes à la Méditerranée, par la Mer-Rouge et l'isthme de Souéys; par M. *Lepère*.

Mémoire sur les anciennes limites de la Mer-Rouge; par M. *Dubois-Aymé*.

Mémoire sur la ville de Qoçeyr et ses environs, et sur les peuples Nomades qui habitent cette partie de l'ancienne Troglodytique; par *le même*.

Mémoire sur l'art de faire éclore les poulets en Egypte, par le moyen des fours; par MM. *Rozière* et *Rouyer*.

Mémoire sur le système d'imposition territoriale, et sur l'administration des provinces de l'Egypte, dans les dernières années du gouvernement des Mamlouks; par feu *Michel-Ange Lancret*.

Notice sur les médicamens usuels des Egyptiens; par M. *Rouyer*.

Mémoire sur le lac Menzaleh, d'après la reconnaissance faite en vendémiaire an 7 (septembre et octobre 1799); par M. le général *Andréossy*.

Mémoire sur la vallée des lacs de Natroun, et celle du fleuve sans eau, d'après la reconnaissance faite les 4, 5, 6, 7 et 8 pluviose an VII (23, 24, 25, 26 et 27 janvier 1799); par *le même*.

Mémoire sur les finances de l'Egypte, depuis sa conquête par le sultan Sélym I^{er}. jusqu'à celle du général en chef Bonaparte; par M. le comte *Estève*.

Mémoire sur la Nubie et les Barâbras; par M. *Costaz*.

Observations sur la fontaine de Moïse; par M. *Monge*.

Description de l'art de fabriquer le sel ammoniac; par M. *Collet-Descostils*.

Mémoires et observations sur plusieurs maladies qui ont affecté les troupes de l'armée française pendant l'expédition d'Egypte et de Syrie, et qui sont épidémiques dans ces deux contrées; par M. le baron *Larrey*.

Mémoire sur les inscriptions koufiques recueillies en Egypte, et sur les autres caractères employés dans les monumens arabes; par M. *Marcel*.

Observations sur les Arabes de l'Egypte moyenne ; par *E. Jomard*.
Mémoire sur les tribus arabes des déserts de l'Egypte ; par *M. Dubois-Aymé*.

De l'état actuel de l'art musical en Egypte, ou relation historique et descriptive des recherches et observations faites sur la musique en ce pays ; par *M. Villoteau*.

Description historique, technique et littéraire des instrumens de musique des orientaux ; par *le même*.

ÉTAT MODERNE, tom. II.

Notice sur la conformation physique des Egyptiens et des différentes races qui habitent en Egypte, suivie de quelques réflexions sur l'embaumement des momies ; par *M. le baron Larrey*.

Mémoire sur la partie occidentale de la province de Bahyrch, connue anciennement sous le nom de *nome Maréotique* ; par *M. Gratién Lépère*.

Notice sur la préparation des peaux en Egypte ; par *M. Boudet*.

Mémoire sur le Meqyâs de l'île de Roudah, et sur les inscriptions que renferme ce monument ; par *J.-J. Marcel*.

HISTOIRE NATURELLE

Mémoire sur les plantes qui croissent spontanément en Egypte ; par *M. Delile*.

Histoire des plantes cultivées en Egypte ; par *le même*.

Description de la vallée de l'Égarement, et conséquences géologiques qui résultent de la reconnaissance qu'on en a faite ; par *P.-S. Girard*.

Discours sur la représentation des roches de l'Egypte et de l'Arabie par la gravure, et sur son utilité dans les arts et dans la géologie ; par *M. Rozière*.

Floræ Aegyptiacæ illustratio ; auctore *A.-R. Delile*.

Description minéralogique de la Vallée de Qoçyr ; par *M. Rozière*.

Description des mammifères qui se trouvent en Egypte ; par *M. Geoffroy-St.-Hilaire*.

Note sur la part qu'ont eue les anciens élèves de l'Ecole Polytechnique au voyage d'Egypte, et à la composition de l'ouvrage qui se publie sur cette contrée.

L'Ecole Polytechnique a fourni à l'expédition d'Egypte, non-seulement quarante de ses anciens élèves, mais plusieurs de ses professeurs les plus distingués, et, dans le nombre, les deux plus illustres de ses fondateurs, MM. Monge et Berthollet. Aussi, l'influence des études et des méthodes admises dans cette Ecole, s'est fait sentir dans toutes les branches de l'expédition scientifique, et encore plus dans l'exécution de l'ouvrage qui est le fruit commun de tous les travaux réunis. L'habitude de la précision rigoureuse dans la recherche de la vérité a présidé à toutes les observations. On s'est attaché à recueillir les mesures les plus exactes des édifices. Rien ne manque aux projections qu'on en a faites pour reconstruire ces monumens à une échelle quelconque, et en offrir une image fidèle. Par-tout où il en a été besoin, on a fait des fouilles profondes, afin d'avoir des données sûres et complètes sur le sol des édifices. L'on a fait des nivellemens multipliés dont plusieurs embrassent une grande étendue de pays. Enfin ce voyage est certainement celui d'où l'on a rapporté le plus de mesures de tout genre.

L'esprit d'exactitude qui a guidé les ingénieurs et les architectes n'a pas été étranger aux dessinateurs. Ils avaient à retracer des formes nouvelles, extraordinaires, et les signes d'un langage perdu. Ces signes sont les hiéroglyphes et les caractères alphabétiques remplissant, les uns, la surface des monumens, les autres, une multitude de manuscrits dont l'existence n'était pas même soupçonnée jusqu'à ce jour. Entièrement inconnus aux voyageurs qui les dessinaient, les hiéroglyphes exigeaient de leur part une patience à l'épreuve, et un amour de l'exactitude, capables de triompher de tous les obstacles. Mais ils sentaient que ces copies des tableaux égyptiens et des hiéroglyphes seraient absolument inutiles, si elles n'étaient pas des imitations rigoureuses, seul moyen de conduire à leur interprétation, soit par des rapprochemens multipliés, soit par la comparaison des autorités avec les monumens.

L'ordre qui règne dans la distribution des parties de l'ouvrage est le fruit du même esprit qui a présidé à la recherche des matériaux. On ne présente pas seulement les différens monumens suivant l'ordre des lieux; mais dans chacun d'eux, on suit constamment la même marche. Le plan général du lieu donne d'abord

une idée générale. Aux plans succèdent des vues pittoresques dont l'objet est le même; ensuite, viennent le plan géométrique de l'édifice, ses élévations, ses coupes mesurées et cotées, les détails principaux de l'architecture, les corniches, les colonnes et leurs chapiteaux. Après ces détails, on donne les sculptures, les bas-reliefs, les peintures, les scènes hiéroglyphiques avec les caractères qui les accompagnent, et cette série de figures est souvent terminée par une perspective géométrique où l'on restaure l'édifice pour en donner une idée complète. Mais cette restauration n'est jamais faite que sur les motifs les plus évidens. Le tracé des ombres, celui des perspectives, ont fourni des occasions fréquentes d'appliquer les méthodes enseignées à l'Ecole. Quand au dessin de l'architecture et de la figure, l'expédition d'Egypte suffirait pour démontrer l'utilité de cette partie de l'enseignement.

Il aurait manqué un avantage essentiel à cette composition des planches, si tous les monumens n'eussent pas été assujétis à la même échelle. Rien de plus commun dans les voyages, que la manie de grandir tous les petits édifices, pour leur faire occuper sur le papier le même espace que les plus grands. Rien aussi ne donne des idées plus fausses; et cela vient que le plus souvent on retire peu de fruit de ces ouvrages à figures. On a, dans le voyage d'Egypte, adopté des échelles uniformes et invariables, tant pour les plans que pour les coupes et les détails. Une légère inspection suffit pour comparer les édifices les plus différens. L'idée première de cette uniformité des échelles appartient à un recueil qui a servi aux études de l'Ecole Polytechnique, et qui est l'ouvrage de l'un de ses professeurs (M. Durand).

On avait à craindre un écueil fâcheux pour la symétrie des planches, dans la multitude de sujets différens et de mains différentes, copiées parmi les tableaux égyptiens. C'est avec un soin particulier, mais toujours en s'attachant à l'exactitude scrupuleuse, qu'on est parvenu à éviter les disparates et à donner aux figures partielles tout l'ensemble et toute la symétrie convenables.

Le texte consacré à décrire les anciens édifices et à suppléer à l'insuffisance des dessins, a été assujéti au même plan, à la même marche. Les *Descriptions des antiquités* correspondent, une à une, avec les monumens, et forment un chapitre séparé, comme l'ensemble des planches forme, pour chaque lieu, un faisceau à part. Comme les séries de planches, la *description* renferme d'abord un coup d'œil général; elle marche ensuite par des développemens de plus en plus circonstanciés, jusqu'à rendre compte des scènes particulières et de tous les objets de détail.

Les *Mémoires d'antiquités* forment une branche séparée de l'ouvrage et complètent tout ce qui regarde l'ancien état de l'Égypte. Ils sont consacrés à l'examen de questions particulières : ce sont des dissertations ou des recherches faites *ex-professo* ; tandis que les descriptions ont pour objet spécial de faire connaître l'état des édifices ; et qu'on n'y entre dans des discussions , que quand le sujet l'exige ou les amène naturellement.

Il convenait , dans la publication de recherches faites d'une manière authentique et devant tant de témoins , de ne rien épargner pour conserver l'exactitude des dessins originaux , et les exécuter d'une manière uniforme. C'est à quoi l'on s'est attaché en surveillant sans relâche la gravure , confiée à plus de cent artistes. L'atelier central établi près de la commission a été d'un grand secours pour arriver à ce but ; et sur-tout l'invention précieuse d'une machine à graver , inventée par feu Conté , qui a rendu tant de services en Égypte , et qui fut le premier directeur des travaux de l'ouvrage. Le nom de Conté et ses travaux ingénieux se rattachent encore à l'Ecole Polytechnique , puisqu'il fut le chef d'une école d'application , celle de Meudon , dont quelque élèves sortaient de la première. Avec cette machine on gradue rigoureusement les teintes égales , ou décroissantes suivant différentes lois.

Les élèves de l'Ecole Polytechnique ont encore concouru à d'autres travaux qui avaient trait directement à leurs études , telles que les observations astronomiques , les mesures météorologiques , les recherches de physique et de chimie ; enfin , et principalement le levé d'une carte géométrique et très-détaillée de toute l'Égypte , depuis les cataractes jusqu'à la méditerranée. C'est entre ces travaux et les dessins des monuments anciens et modernes que les ingénieurs ont partagé tout leur tems , pendant la durée de l'expédition. La carte d'Égypte est composée de cinquante feuilles , grandes comme celles de Cassini et non moins détaillées qu'elles , assujéties à trente six observations célestes. A cette carte sont jointes des plans topographiques en grand nombre , et des plans du Kaire et d'Alexandrie , levés et dessinés avec les mêmes détails que les plans qu'on possède des grandes villes de France.

Les édifices modernes , ouvrages des Arabes , et des Égyptiens devenus mahométans , offraient un moindre intérêt que les monuments antiques ; cependant ils n'ont pas été négligés : on a dessiné les plus importants , toujours avec le même soin , mais avec moins de détails. Les élèves de l'Ecole n'ont pris qu'une part secondaire à cette seconde branche de l'ouvrage consacrée à l'état moderne de l'Égypte , à l'exception de la partie géographique.

Il en est de même de l'*Histoire naturelle*. Cette troisième partie

de la collection générale, est due à des naturalistes étrangers à l'Ecole, excepté M. Dupuis, minéralogiste. Cependant plusieurs des élèves se sont attachés, en Egypte, à recueillir des animaux, des minéraux et des plantes, et se sont empressés d'en rapporter des échantillons pour le cabinet de l'Ecole. M. Lancret s'est occupé d'entomologie ; M. Jomard de botanique et de minéralogie ; M. Dubois a aussi recueilli des plantes.

Toutes les descriptions d'antiquités sont l'ouvrage des élèves de l'Ecole. Les plus importantes sont de la main de MM. Chabrol, Devilliers, Jollois, Jomard et Lancret. MM. Dubois-Aymé et Saint-Genis en ont rédigé plusieurs.

Le nivellement des deux mers, travail capital, est encore pour la plus grande partie, l'ouvrage des élèves de l'Ecole Polytechnique. M. Lepère, ancien adjoint à l'inspecteur des études, a été le rédacteur de ce travail.

En résumant cette note, il est aisé de voir que le voyage d'Egypte, et la composition de l'ouvrage destiné à décrire ce pays ont fourni l'application la plus complète de toutes les études de l'Ecole Polytechnique, soit sous le rapport des sciences physique et géométriques, soit du côté des arts graphiques. J.

§. IV. PERSONNEL.

Lagrange (Joseph-Louis), auteur de la *Mécanique analytique*, né le 25 novembre 1736, a terminé sa carrière honorable le 10 avril 1813. Les deux ouvrages de ce célèbre géomètre, la *Théorie des fonctions analytiques*, et le *Calcul des fonctions*, ont été le sujet des leçons qu'il a données à l'Ecole Polytechnique, en 1795, 1796 et 1799. Il fut nommé professeur dans cet établissement, à l'époque de sa fondation (1794). Depuis l'année 1799, il n'a plus professé ; mais désigné par l'Institut pour l'un des membres du conseil de perfectionnement, il en a suivi exactement les séances, et il a toujours considéré l'Ecole Polytechnique comme une institution très-utile aux progrès des sciences.

La classe des sciences physique et mathématiques a nommé, pour remplacer M. Lagrange, dans la section de géométrie, M. Poinot, professeur adjoint à l'Ecole Polytechnique (séance du 31 mai 1813), et dans le conseil de perfectionnement de cette Ecole, M. Carnot.

Extrait d'une lettre concernant M. Lagrange, insérée dans le Moniteur du 26 février 1814.

Comme on peut être curieux de connaître la série de ses premiers travaux, je vais, d'après lui, la rapporter dès-à-présent. Il étudia d'abord l'arithmétique, les élémens d'Euclide, et l'algèbre de Clairaut; puis, *en moins de deux ans*, il lut dans l'ordre où je les énonce : les Institutions de M^{lle}. Agnesi, l'*Introductio* d'Euler, les Leçons de Jean Bernoulli, la Mécanique d'Euler, et les deux premiers livres des Principes de Newton, la Dynamique de d'Alembert, le Calcul intégral de Bougainville, enfin le Calcul différentiel et le *Methodus inveniendi* d'Euler. Ce fut, comme on le sait, l'étude de ce dernier ouvrage qui le conduisit à découvrir le calcul des variations.

En parlant du *bonheur* de Newton qui avait trouvé un *système du Monde à expliquer* (bonheur, remarquait-il d'un air sérieux et presque chagrin, qu'on ne rencontre pas tous les jours), il se plaisait à citer ce qu'il appelait aussi le *bonheur* d'un de ses confrères, dont le génie inventif et original l'avait fortement frappé. Nous allons même nous hasarder à citer de lui un propos à ce sujet qui peint fidèlement sa manière naïve de s'exprimer, quand il était vivement pénétré : « Voyez, dit-il un jour, ce dia... de *** , « avec son Application de l'analyse à la génération des surfaces, il « sera immortel, il sera immortel !... »

Sa candeur était égale à sa pénétration, et le contraste habituel de ces deux grandes qualités de son esprit et de son caractère, donnait à son commerce un haut degré d'intérêt et de piquant. Comme il n'avait que des idées parfaitement nettes, il voulait toujours que leur expression fût une peinture fidèle de ses conceptions. Delà, quand il avait commencé quelque phrase qu'il désespérait d'achever assez clairement, ces interruptions originales, suivies pour l'ordinaire de son mot favori, *je ne sais pas, je ne sais pas...* Sans chercher à la retourner autrement, il la laissait là brusquement. Souvent aussi ces silences imprévus étaient causés par une idée nouvelle qui venait à la traverse, et qui absorbait rapidement son *intelligence rechercheuse*. (Expression bien vraie de *Hérault de Séchelles*, en parlant de Lagrange.) Qui ne l'a pas vu s'interrompre ainsi tout-à-coup aux leçons qu'il donnait à l'Ecole Polytechnique, paraître quelquefois embarrassé comme un commençant, quitter le tableau et venir s'asseoir en face de l'auditoire, tandis que maîtres et élèves, confondus sur les bans, attendaient dans un respectueux silence qu'il eût ramené sa pensée des espaces qu'elle était allée parcourir !

Signé, L. B. M. D. G.

M. Robiquet (Pierre) a été nommé à la place de répétiteur de chimie, vacante par la mort de M. Cluzel.

M. Rouby, professeur suppléant au lycée Charlemagne, a été nommé adjoint aux répétiteurs d'analyse à l'Ecole Polytechnique, pour l'année scolaire 1813 — 1814.

Promotions d'anciens élèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs. (Voyez pages 297 et 370 du 2^e. volume.)

ARTILLERIE.

Général de brigade.

M. le chevalier Berge. (Décret du 26 mai 1813.)

Majors.

MM. Brechtel (Henry-Ignace).
D'Hautpoul (Marie-Constant-Fidèle-Henry-Amand).
Aubert (François).
Capelle (Antoine-Laurent).
Renaud (Jean-Baptiste-Lupicin).
Pache (Jean).
Lefrançais (Frédéric-Louis).
St.-Cyr (Aimé-Prosper).
Reguis (François-Etienne).
Abeille (Joseph-Ildephonse-Clément).

Chefs de bataillon.

MM. Forceville (Louis).
Evain (Auguste-Joseph).
Mocquard (Bonaventure)
Lavillette (Claude)
Leclerc (Marie-Joseph)
Durbach (Joseph-Léopold)
Eggerlé (Jean-Jacques-Adam-
Hyacinthe-Gabriel)
Dechambray (Georges)
Bitsch (Jean-Augustin)
Béranger (Amable-Alexandre)
Demetz (Victor-Sylvestre)
Hortet (François-Blaise-Thomas)
Lasnon (Félix-Aimé)
Henraux (Jean-Baptiste-Xavier)

} Garde impériale.

MM. Gourgaud (Gaspard), 1^{er}. officier d'ordonnance.
 Pion (Claude-Nicolas).
 Foulquier (Jean-Baptiste-Thérèse).
 Thouvenel (Louis).
 Guerrier (Jean-Baptiste-Pierre-Alexandre-François).
 Dumas-Culture (Joseph-Charles) . . . }
 Bouteiller (Charles-François-Romarc). } *Garde impériale.*
 Le Noury (Alexandre-Jean-Marie). . . }
 Pron (Pierre-Joseph).
 Limozin-St.-Michel (Louis-Emmanuel). *Garde impériale.*
 Alphand (François-Charles-Marie).
 Nottret (Louis).
 Chandon (Antoine-Victor-Barthelemy).
 Gosse (Casimir).
 Gosset (Charles-Antoine).
 Moret (Jean-Marie-François).
 Delesvaux (Antoine).
 Prévost (Jean-Michel-Marie).
 Puthaux (Henry-François).
 Dubocq (Jean-Thomas).
 Foucault (Camille-Louis).
 Chenin (Jean-Baptiste) }
 Huet (Jean-Guillaume) } *Garde impériale.*
 Hulot (Jean-Gaspard).
 Ducros (Joseph).
 Etchegoyen (Martin).
 Rey (Edouard-Eléonore-Guillaume).
 Gersse (Joseph-Augustin).
 Joffre (Pierre-Jean-Joseph) *Garde impériale.*
 Monval (Charles-Antoine-Auguste).
 Dauty (Jean-Pierre).

Nota. Tous les officiers qui appartiennent à la garde impériale, ont le grade pour lequel ils sont portés dans cette liste, et restent dans les fonctions du grade inférieur tant qu'ils servent dans la garde.

PONTS ET CHAUSSEES.

Ingénieur en chef.

M. Tourneux (Jean-François).

GÉNIE MARITIME.

Sous-ingénieur, chef de bataillon.

M. Masquelez (François-Augustin-Joseph).

GÉNIE MILITAIRE.

Colonels.

M. Bernard (aide-de-champ de S. M.).		MM. Treussart. Constantin.
---	--	-------------------------------

Majors.

MM. Christin. Bodson. Thiebault. Finot.		MM. Thuillier. Marion. Paulin.
--	--	--------------------------------------

Chefs de bataillon.

MM. Parnajon. Errard. Vallantin. Dupau. De la Vigne. Audoy. Cournault. Maillard. Hersart.		MM. Vivier. Huz. Dumoncel. Olry. Lemut. Berthois. Atthalin. Riolay. Plazanet.
---	--	---

CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

La quatorzième session du Conseil de perfectionnement a été ouverte le 6 novembre 1853, et terminée le.....

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole Polytechnique, président.

S. Exc. M. le comte de Cessac.

Examineurs pour l'admission dans les services publics, membres désignés par la loi.

MM. Legendre , Lacroix , Ferry , Dulong.

Membres de l'Institut national , pris , selon la loi , dans la classe des sciences de l'Institut.

MM. Le comte Berthollet , le comte Laplace , Carnot.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la guerre.

MM. Le chevalier Allent, officier supérieur du génie ; Cotty, officier supérieur d'artillerie ; Moynet, chef d'escadron au corps des ingénieurs géographes ; Champy, administrateur général des poudres et salpêtres.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la marine.

MM. Le comte Sugny (1), inspecteur général d'artillerie de la marine ; le baron Sané, inspecteur général du génie maritime.

Désignés par S. Exc. le Ministre l'intérieur.

MM. Prony, inspecteur général des ponts et chaussées ; Lelièvre, inspecteur général des mines.

Directeur des études de l'Ecole Polytechnique.

M. Durivau.

Commissaires choisis par le conseil d'instruction parmi ses membres.

MM. Le comte Monge ; le baron Guyton-Morveau, Andrieux, Thenard.

Secrétaire du conseil.

M. Marielle, quartier-maître trésorier de l'Ecole Polytechnique.

CONCOURS DE 1813.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Analyse ; Mécanique..... { MM. Legendre, Lacroix,
examineurs permanents.

*Géométrie descriptive ; Analyse
appliquée à la géométrie ;
Physique.* } M. Ferry.

Chimie..... M. Dulong.

(1) Remplacé par M. le général THIAUM, adjoint à l'inspecteur de l'artillerie de la marine.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Paris	M. FRANCOEUR.
Tournée du Sud-Ouest	M. REYNAUD.
Tournée du Nord-Est	M. DINET.
Tournée du Sud-Est	M. LABEY.

Les examens ont été ouverts le 1^{er}. août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, le 27 septembre 1813, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année, 460 candidats ont été examinés,

SAVOIR :

A Paris	229	} 460.
Dans les départemens	231	

Sur ce nombre 356 ont été jugés admissibles,

SAVOIR :

De l'examen de Paris	174	} 356.
Des départemens	182	

13 candidats ont été rejetés du concours, et 5 reculés dans l'ordre d'admission, par défaut d'exercice dans l'art du dessin.

6 candidats ont de même été rejetés du concours par défaut d'instruction suffisante, en littérature latine ou française.

Le nombre des candidats admis à l'Ecole, par suite de la décision du Jury, a été de 209,

SAVOIR :

De Paris	97	} 209.
Des départemens	112	

Nombre des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement,

SAVOIR :

De Paris	1449	} 3026.
Des départemens	1577	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole,

SAVOIR :

De Paris	3146	} 7015.
Des départemens	3869	

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

*Des Candidats admis à l'École Polytechnique, au nombre de 209,
par suite de la décision du Jury, du 27 septembre 1813.*

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENT.
Adenot.	Philibert-Benoît.	Rosey.	Saône-et-Loire.
Anfray.	Aristide-Elie.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Aragon.	Louis.	Narbonne.	Aude.
Armellini.	Pierre.	Rome.	Rome.
Assolant.	Mutius-Scevola.	Aubusson.	Creuse.
Avogadro de Co-	Emmanuel-César-Etien-		
lobian.	ne-Marie.	Ivrée.	Doire.
Bahuaud.	Pierre-Gabriel.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Baillet.	Théodore.	Ligny.	Meuse.
Barbier.	Jean-Baptiste-Théodore.	Brest.	Finistère.
Bardin.	Libre.	Montargis.	Loiret.
Barré de Saint-			
Venant.	Adhémar-Jean-Claude.	Fortoiseau.	Seine-et-Marne.
Barrier.	André-Eugène.	Abbeville.	Somme.
Batbedat.	Léon.	Paris.	Seine.
Bidault.	Jean-Jacques.	Romorantin.	Loir-et-Cher.
Bobillier.	Marie-André.	Lons-le-Saulnier.	Jura.
Bonneton.	Achille.	Chantelle.	Allier.
Bonnin.	Jean.	Lyon.	Rhône.
Bornet.	François-Théophile.	Guérigny.	Nièvre.
Boscher.	Charles-Alexandre.	Thury-Harcourt.	Calvados.
Bouchot Plain-			
chant.	Juste.	Orléans.	Loiret.
Bouglé.	François-Auguste.	Tours.	Indre-et-Loire.
Bouillon.	Gédéon-Edouard.	Paris.	Seine.
Bouldouyre.	Barthelemy.	Coutras.	Gironde.
Bouteiller.	Modeste-Frédéric.	Rouen.	Seine-inférieure.
Boutillier.	Sulpice-Narcisse.	Beauvais.	Oise.
Bruslé.	Auguste-Prosper.	Paris.	Seine.
Bussy.	Antoine-Alex.-Brutus.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Camus.	Charles-Alex.-Bernard.	Metz.	Moselle.
Capella.	Etienne-Germain.	Mas Stes.-Puelles.	Aude.
Carles.	Emile.	Paris.	Seine.

NOMS.	PRENOMS.	LIEUX. DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENT.
Caron.	Pierre-François.	Soissons.	Aisne.
Carré de Candé.	François-Jules.	La Rochelle.	Char.-Inférieure.
Castaigède.	Jean.	Pissos.	Landes.
Castillon.	Louis-Auguste.	Metz.	Moselle.
Cathol Duceffan.	Amable-Guill.-Joseph.	Pradelles.	Haute-Loire.
Chambige.	Benoît-Annet.	Billom.	Puy-de-Dôme.
Chancel.	Jean-Joseph-Angustin.	Briançon.	Hautes-Alpes.
Chaper.	Pierre-Achille-Marie.	Paris.	Seine.
Chauchet.	Godefroy-Junius.	Bouillon.	Ardenne.
Chavelet.	Claude-Étienne.	Germigney.	Jura.
Chicoyneau La- vallette.	Absynthe.	Saint-Cyr-sur- Loire.	Indre-et-Loire.
Chopinot d'Lein- dre.	Antoine-Achille.	Paris.	Seine.
Collet.	Marie-Claude-Julien.	Paris.	Seine.
Constantin.	Achille.	Blois.	Loir-et-Cher.
Courtial.	Maurice.	Paris.	Seine.
Coustant Dyan- ville.	Charles-César.	Senlis.	Oise.
Crozals.	Paulin.	Montpellier.	Hérault.
Dalmas.	François.	St.-Amand-Ro- che-Savine.	Puy-de-Dôme.
Dandelin.	Germinal.	Le Bourget.	Seine.
Davin.	Victor-Félix.	Paris.	Seine.
Debacq.	Alcindor.	Paris.	Seine.
Dechamp.	Jacques-Émile-Benoît.	Nevers.	Nièvre.
Delafoye.	Eugène-Charles-Franç.	Wetzlar en Wété- ravis.	
Delbourg.	Jean-Baptiste.	Montanquin.	Lot-et-Garonne.
Demallet de La- védrine.	Jean-Henri.	Riom.	Puy-de-Dôme.
Desforges.	Auguste.	Amiens.	Somme.
Dessin.	Louis-Antoine.	Calais.	Pas-de-Calais.
Destremau.	Jacques-Émile.	Houga.	Gers.
D'Huez.	Alexandre-Pierre.	Paris.	Seine.
Donop.	Claude-Frédéric.	Nancy.	Meurthe.
Drut.	André.	Douay.	Nord.
Dubois.	Charles-Gustave.	Paris.	Seine.
Dubois.	Edouard.	Paris.	Seine.
Dumon.	Antoine-Émile.	Agen.	Lot-et-Garonne.
Dundas.	Charles.	Paris.	Seine.
Du Puits.	Marie-François.	Vienne.	Isère.
Duval Dumeauil.	Alexan.-Pierre-Martial.	Paris.	Seine.
Duvernoy.	Fructidor.	Paris.	Seine.
Enfantin.	Barthélemy-Prosper.	Paris.	Seine.
Favre Bulle.	Ami.	Besançon.	Doubs.
Féline.	Adrien-Benjamin.	Paris.	Seine.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENTS.
Ferréol.	Joseph-Charles.	Nismes.	Gard.
Ferrière.	François-Hyacinthe.	Flavigny.	Meurthe.
Folliart.	Georges-Louis.	Reims.	Marne.
Fournier.	Marcellin.	Paris.	Seine.
Fraix.	Jean-Baptiste.	Verrens.	Mont-Blanc.
François.	Jean-Baptiste-Etienne.	Briey.	Moselle.
Frégier.	Paul-Félix-Bienvenu.	Aix.	Bouc.-du-Rhône.
Frossard de Saugy.	Jean-Louis.	Bursin et Gilly, canton de Vaud, en Suisse.	
Gaillardon.	Urbain.	Aubeterre.	Charente.
Gamot.	Charles-Médéric.	Provins.	Seine-et-Marne.
Gand.	Pierre-Henri.	Reims.	Marne.
Garcerie.	Nicolas-Jacques-Louis César.	Mirande.	Gers.
Garçon Rivière.	Charles-Philippe.	Paris.	Seine.
Gardeur Lebrun.	Nicolas-Autoine.	Metz.	Moselle.
Garnot.	Auguste-Théodore.	Brest.	Finistère.
Gentil.	Aimé-Prosper.	Metz.	Moselle.
Gérardy.	Louis-François.	Paris.	Seine.
Giguet.	Pierre.	Véron.	Yonne.
Giueste.	Jean-Philippe.	Puilaurens.	Tarn.
Giraud.	Charles-Henri.	Grenoble.	Isère.
Gisclard.	Jean-Jacques.	Saint-Juéry.	Tarn.
Gitton de la Ri- bellerie.	Etienne.	Melan.	Seine-et-Marne.
Gonssé.	Paul-Emile.	Blendecques.	Pas-de-Calais.
Gonyn de Lurieu.	François-Benoît.	Feurs.	Loire.
Gouazé.	Jean-François.	Saint-Girons.	Arrière.
Gravier.	Bertrand.	Bergerac.	Dordogne.
Grillet Serre.	Achille-Jacques.	Auxerre.	Yonne.
Guérard.	Jacques-Charles.	Paris.	Seine.
Guibert.	Marie-Pierre-Adolphe.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Guimet.	Jean-Baptiste.	Veiron.	Isère.
Guyonneau Pam- bour.	François-Moutain.	La Fère.	Aisne.
Guyot Duclos.	Timoléon.	Avesnes.	Nord.
Hedde.	Félix-Orme.	Calais.	Pas-de-Calais.
Hélie.	Félix.	Nantes.	Loire-Inférieure.
Henry de Fa- veaux.	Alex.-Joseph Ghislain.	Mettet.	Sambre-et-Meuse.
Houeau.	Réné.	Château-du-Loir.	Sarthe.
Joly.	Jean-Gabriel.	Thiaucourt.	Meurthe.
Joubert.	Joseph-Théodore.	Noirmoutiers.	Vendée.
Jousserant.	Antoine-Arthur.	Rochefort.	Char.-Inférieure.
Juge.	Jean-Baptiste.	Kiom.	Puy-de-Dôme.
Keguelin de Ro- ziers.	Auguste.	Strasbourg.	Bas-Rhin.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENTS.
Iablancherie.	Jean-Marcel.	Bordeaux.	Gironde.
Iabrosse.	Fraternité.	Paris.	Seine.
Lainé.	Joachim.	Les Andelys.	Eure.
Le Blanc.	Gaspard.	Eclaron.	Haute-Marne.
Le Breton.	Georges-Antoine.	Cognin.	Mont-Blanc.
Le Camus.	Bon.	Paris.	Seine.
Le Chevalier.	Victor Arsène.	Neubourg.	Eure.
Leclerc.	Pierre.	Paris.	Seine.
Le Compte.	Louis-Nicolas.	Tours.	Indre-et-Loire.
Le Conte.	Jean.	La Boussac.	Ille-et-Vilaine.
Iefrançois.	Henri.	Chinon.	Indre-et-Loire.
Léger.	Emile.	Lagrange-aux-Bois.	Marne.
Lemaistre.	Louis René.	Villebourg.	Indre-et-Loire.
Le Marchand.	Désiré-Germinal.	Pont-Audemer.	Eure.
Lenfant.	Achille-Héliotrope.	Fontainebleau.	Seine-et-Marne.
Le Paige Dor-senne.	Louis-Nicolas-Edme.	Ardres.	Pas-de-Calais.
Lionnet.	Antoine-Louis.	Paris.	Seine.
Loizillon.	Dominique.	Metz.	Moselle.
Mabru.	Joseph - Achille - Paul-Emile.	Clermont.	Puy-de-Dôme.
Mahot.	Fréd.-Jean-Christostome.	Ploermel.	Morhihan.
Maillefert.	Eugène.	Tonnerre.	Yonne.
Mainot.	Louis-Bruno.	Paris.	Seine.
Maitrot.	Simon.	Recey-sur-Ource.	Côte-d'Or.
Malpassuti.	Charles - Blaise-Victor-Raymond - Gérard-Louis.	Carbonara.	Gènes.
Marcescheau.	Armand-Jean-B.-Louis.	Boisset-St.-Priest.	Loire.
Marchaud.	Charles-François.	Paris.	Seine.
Marion.	Jacques-Charles.	Paris.	Seine.
Mariz.	Jean-Jacques.	La Haye.	Bouc-de-la-Meuse.
Mathiot.	Nicolas-Joseph-Alexis.	Thiaucourt.	Meurthe.
Menjaud.	Camille.	Paris.	Seine.
Mercanton.	Jean-Samuel.	Vevey en Suisse.	
Merens.	Meinard.	Hoorn.	Zuiderzée.
Mie.	Justin.	Périgueux.	Dordogne.
Minngoy.	Henri-Georg.-Philibert.	Colmar.	Haut Rhin.
Minard.	Pierre-Alex.-Stanislas.	Roye.	Somme.
Mounier.	Paul.	Poligny.	Jura.
Moreau.	Jean.	Chebrac.	Charente.
Moreau.	Emile.	Louhans.	Saône et-Loire.
Morin.	Arthur-Jules.	Paris.	Seine.
Morlet.	Charles-Gabriel.	Paris.	Seine.
Moulton.	Louis-Charles-Auguste.	Dunkerque.	Nord.
Mutel.	Pierre-Auguste-Victor.	Arras.	Pas-de-Calais.
Nicolas de Meissas.	Alexandre-André.	Serres.	Hautes-Alpes.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENTS.
Noizet Saint Paul.	Henri-Louis-Auguste.	Barly.	Pas-de-Calais.
Nourtier.	Charles.	Coulombs.	Eure-et-Loire.
Pargade.	Philibert-Adolphe.	Garlin.	Basses-Pyrénées.
Paris.	Antoine.	Paris.	Seine.
Pavan.	François-Joseph-Marie.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Payn.	Romain-Hippolyte.	Troyes.	Aube.
Pédroni.	Victor-Amédée.	Bordeaux.	Gironde.
Pelletier.	Armand-Joseph.	Voigny.	Aube.
Percy.	Casimir.	Montaigu.	Tarn-et-Garonne.
Pernet.	François-Simon.	Gergy.	Saône-et-Loire.
Peyré.	Jean-Marie-Marcelin.	Réalmont.	Tarn.
Picot.	Adrien.	Châlons.	Marne.
Pierrugues.	Jean-François.	Callas.	Var.
Piet.	Mathieu-Glaucus.	Paris.	Seine.
Piohert.	Guillaume.	La Guillotière , près Lyon.	Rhône.
Pirain.	Emile-Félix.	Gisors.	Eure.
Pommié.	Jean-Jacques.	Alicante en Es- pagne.	
Pons.	Joseph.	Monclar.	Lot-et-Garonne.
Pravaz.	Charles-Gabriel.	Le Pont-de-Beau- voisin.	Isère.
Prieur de La- combe.	Eugène.	Nemours.	Seine-et-Marne.
Proust.	Théodore.	Niort.	Deux-Sèvres.
Prudhon.	Eudamidas.	Paris.	Seine.
Puillon Boblaye.	Théodore.	Napoléonville.	Morbihan.
Rabusson.	François-Némorin.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Raffard.	François.	Serrières.	Ardèche.
Raspieller.	Joseph-Ignace.	Porentruy.	Haut-Rhin.
Raymond.	Charles-Victor-Emile.	Charly.	Rhône.
Récicourt.	Charles.	Montreuil - sur - Mer.	Pas-de-Calais.
Rérolle.	Jacques-François.	Decize.	Nièvre.
Rigaudie Saint - Marc.	Joseph.	Montant.	Lot-et-Garonne.
Ripa.	Louis-Ch.-Félix-Benoit.	Romano.	Doire.
Ripert.	Pierre-Louis.	Chambéry.	Mont-Blanc.
Rogelin.	Pierre-Jacques.	Paris.	Seine.
Rogier.	Pierre-Henri.	Paris.	Seine.
Rost.	Pierre-Adolphe.	Condezaigues.	Lot-et-Garonne.
Roubaud.	Pierre-Jos.-Noté-Mélite.	Gap.	Hautes-Alpes.
Roussel.	Louis-Marie-Joseph.	Pont-St.-Esprit.	Gard.
Roussigné.	Charles-Michel.	Troyes.	Aube.
Sabde.	Jean-Jacques-Mauvice.	Millhaud.	Aveyron.
Salomon.	Joseph-Nicolas-Louis.	Verdun.	Meuse.
Sergent.	Théodore.	Paris.	Seine.
Talabot.	Joseph-Léon.	Limoges.	Haute-Vienne.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENTS.
Thirion.	Amand - Joachim - Ambroise.	Paris.	Seine.
Thurninger.	Alexis - Georges - Benjamin - Frédéric.	Paris.	Seine.
Tinseau.	Charles.	Metz.	Moselle.
Tribalet.	Ange - Félix.	Coucy - le - Château.	Aisne.
Tribert.	Florimont.	La Ferté-Milon.	Aisne.
Trippier Lagrange.	Aimé - Gilles.	Mayenne.	Mayenne.
Trouillet.	Louis - Edmé.	Montargis.	Loiret.
Varin.	Jean - Charles.	Mondidier.	Somme.
Vassas.	Jean - Claude - Charles.	Montpellier.	Hérault.
Vestier.	Archimède.	Paris.	Seine.
Vigier.	Marc - Antoine.	Paris.	Seine.
Villeneuve.	Decius.	Cloué.	Vienne.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Listes, par ordre de mérite, des élèves admis dans les services publics, pendant l'année 1813.

ARTILLERIE DE TERRE.

En avril 1813.

MM.

Protche.
Gauchet.
Migout.
Ginet.
Perrodon.
Patau.
Rossi.
Hennebert.
Cléry.
Donnat.
Girard (Aimé - Auguste).

MM.

Stocard.
Doulcet Pontécoulant.
Brillard.
Sarrieu.
Empaytaz.
Giraud (Marc-Sébastien-Xavier).
Lanty.
Fauchon.
Gloux.
Hermann.
Cartier.

MM.

Blanchard.
 Delon.
 Alauze.
 Corbin.
 Lamarque.
 Munier.
 Lelasseux-Lafosse.
 Tattet.
 Lemit.
 Gillet.
 Balladier.
 Provigny.
 Lalitte.
 Fabre (Albin- Camille-Franç).

MM.

Pinel (Louis-Pierre).
 Ledenmat Kervern (E.-M.-H.).
 Houdaille.
 Magniez.
 Charles dit Artaud.
 Pinac.
 Lacave Laplagne.
 Sers.
 Arago.
 Terson.
 Fromentin.
 Lherbette.
 Ditch.
 Auvé.

TOTAL 50

En octobre 1813.

ANCIENS ÉLÈVES DE LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.

Sobrero.
 Poedevin.
 Tardy.
 Mazé.
 Pottier (Colza).
 Lair.
 Prat (J.-A.-F.).
 Lefaivre (A.-F.).
 Serton du Plonget.
 Guiraudet Saint-Amé.
 Rangouse.
 Girault (J.-J.)
 Contencin.

MM.

Gille dit Dumarchais.
 Lecoq.
 Hacquin.
 Berthault.
 Gaudin.
 Séverac.
 Delespée.
 Soubeiran.
 Delorme.
 Faure de Fournoux.
 Boscary.
 Vérité.
 Bing.

TOTAL 26

ÉLÈVES NOUVELLEMENT ADMIS A LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.

Ruel.
 Marque Doncour.
 Sirurguet.
 Treins.
 Parchappe.

MM.

Gay.
 Marminia.
 Duport.
 Pacotte.
 Babinet.

MM.

Lacoste.
 Coulet.
 Brunet.
 Puech.
 Ronin.
 François.
 Roux.
 Poullain de Saint-Foix.
 Tirel Martinière.
 Rubin de la Missonnais.
 Chère.
 Dalican.
 Mareschal.
 Gaillard.
 Escanyé.
 Ranfrai-Bajonnière.
 Reboul.

MM.

Silvestre.
 Molinos.
 Santeul.
 Gambini.
 Coste.
 Pin.
 Michelin.
 Couty.
 Renault.
 Canton.
 Jeannin.
 Doucet.
 Molte.
 Sain-Mannevilleux.
 Chapotin.
 Ménard.
 Laroyenne.

TOTAL. 44 (1)

GÉNIE MILITAIRE.

MM.

Simon.
 Dalesme.
 Salenave.
 Deniéport.
 Delbet.
 Fuchsamburg.
 Lorieux.
 Demonthiers de Boisroger.
 Delannay.
 Bédigie.
 Nisot.
 Goupilleau.
 Meilheurat.
 Robert-Dugardier.

MM.

Lelievre.
 Feuardant-d'Eculleville.
 Botto.
 Reguis.
 Ruinet.
 Oblet.
 Frémont.
 Fauquier.
 Groult.
 Loppé.
 Dumesniladelée.
 Gombault.
 Narjot.
 Tilly-Kerveno.

(1) Les élèves dont les noms suivent, et qui ont été portés comme démissionnaires dans le No. précédent, page 491, sont entrés dans le service de l'artillerie, en qualité d'élèves sous-lieutenants.

MM. Ajasson de Grandsagne.
 Arnoux.
 Barthes.

MM. Buisson.
 Cornisset.
 Cramouzaud.

MM. Domergue.
 Paulin.

MM.

Marchais.
Challaye.
Boutault.
Castaignet.
Guéry.
Vandelin-Dangerans.
Vouzeau.
Ducros.

MM.

Lebouedec.
Amphoux.
Dautherville.
Grivet.
Devienne.
Dosque.
Charon.
Bizot.

TOTAL. 4

INGÉNIEURS GÉOGRAPHES.

ANCIENS ÉLÈVES DE LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.

Peytier.
Anfossi.
Mallat.
Belland.
Duhousset.
Largeteau.

MM.

Puillon-Boblaye.
Gougeon.
Lecamus.
Schneider.
Gambier.

TOTAL. 11

ÉLÈVES NOUVELLEMENT ADMIS A LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.

Poudra.
Faulte-du-Puyparlier.
Stein.
Salneuve.
Révérony.

MM.

Martner.
Ferrandin-Gazan.
Tellier.
Noël (N.-J.).
Gavard.

TOTAL. 10

PONTS ET CHAUSSÉES.

MM.

Mutrecy *dît* Maréchal.
Vergès.
Gimmig.

MM.

Goupil-Prefeln.
Vimal-Teyras.

TOTAL. 5.

MINES.

MM.
Petit-Dufrénoy.
Thibaud.

M.
Labarbe.

TOTAL 3

CONSTRUCTION DES VAISSEAUX.

MM.
Garnier.
Campaiguac.
Hébert.
Rachia.
Zeni.

MM.
Gernaert.
Vincent.
Lefebvre de Sallay.
Fauveau.

TOTAL 9

NOMMÉS SOUS-LIEUTENANS DANS LA LIGNE.

M. Reynaud-Villeverd.

M. Vidé.

TOTAL 2

DÉMISSIONNAIRES.

MM.
Chevalier.
Bouzane-Desmazery.
Grangeneuve.
Le Mauff.

MM.
Malaret.
Pinot.
Puissant.
Terrasson.

TOTAL 8

MORT.

M. Renouard de Saint-Loup.

TOTAL 1

ETAT de situation des élèves de l'Ecole Polytechnique, à l'époque du 1^{er}. janvier 1814.

L'Ecole était composée, au 1^{er}. janvier 1813, de... 340 Elèves,
Elle a perdu pendant l'année 1813,

S A V O I R :

Mort	1	} 9	}
Démisionnaires	8		
<i>Admis dans les services publics.</i>			
Artillerie de terre (1).	120	} 204	} 213
Génie militaire	44		
Ingénieurs géographes.	21		
Ponts et chaussées.	5		
Mines.	3		
Construction des vaisseaux.	9	}	
Nommés sous-lieutenans dans la ligne.	2		

Il restait. 127

Elèves admis à l'Ecole, à dater du 1^{er}. novembre 1813 . 209

TOTAL des élèves composant l'Ecole Polytechnique, } 336 Elèves.
au 1^{er}. janvier 1814. }

S A V O I R :

Première division	123	} 336
Deuxième division.	213	

(1) Non compris huit des Elèves désignés comme démissionnaires, page 491, 2^e. vol. de la Correspondance, et qui ont été admis dans le service de l'artillerie en qualité d'élèves sous-lieutenans. On ne doit compter comme démissionnaires que MM. Bryon, Gohard, Lindenmeyer, Mieussens.

Errata.

Pag. 53, lig. 6, deux cercles situés dont, lisez : deux cercles dont.

55, 13, neuvième, lisez : neuvième.

Id. 15, telles, lisez : telle.

Id. 20, cercle 1, lisez : cercle.

56, 30, d'un arc *Aa*, la droite *As*, lisez : d'un arc *Ba*, la droite *Ha*.

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Redigée par M. HACHETTE.

~~~~~  
III<sup>e</sup>. Vol. , I<sup>er</sup>. Cahier.  
~~~~~

Pages 1 — 110. 6 planches. Janvier 1814.

TABLE DES MATIÈRES

Contenues dans ce Cahier.

§. I^{er}. SCIENCES MATHÉMATIQUES.

De l'hexagone mystique , de Pascal ; par M. Brianchon.

Du centre de similitude de deux courbes semblables ; par M. Monge.

Démonstration d'un théorème de trigonométrie sphérique ; par M. Cornely , élève de l'Ecole Polytechnique.

Nouvelle proposition de géométrie ; par M. Chasles , élève.

Théorèmes nouveaux de géométrie ; par M. Giorgini , élève.

Solution d'un problème de géométrie ; par M. Olivier , élève.

Propositions relatives aux courbes et aux surfaces du second degré ; par M. Chasles , élève.

Propriété des sections coniques , par M. Frégier , élève. p. 17

Formule de trigonométrie sphérique ; par M. Paradis de Mocrif , professeur de l'école de navigation à Bayonne.

De la courbe de contact d'un cône , ou d'un cylindre , et de la surface hélicoïde des filets de la vis triangulaire ; par M. Hachette.

De la sphère qui touche quatre sphères données. Solution analytique ; par M. Hachette.

Sur une difficulté relative à la rectification des courbes ; par M. Poisson.

Décomposition des fractions rationnelles en d'autres fractions plus simples ; par M. de Stainville.

Du Pendule à oscillations coniques ; par M. Pouillet , licencié ès-sciences.

Sur le mouvement de rotation des corps libres ; sur la résistance qu'éprouve un point matériel , assujéti à se mouvoir sur une courbe donnée ; par M. Rodrigues , licencié ès-sciences.

Recherche des variations qu'éprouvent les ascensions droites et les déclinaisons des étoiles, en vertu d'un petit déplacement de l'équateur et de la ligne des équinoxes; par M. Puissant.

De la vis d'Archimède; par M. Hachette.

Note sur la vis d'Archimède; sur les cas où l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles a lieu entre les espaces finis, décrits par les corps, lors des changemens de position d'un système; par M. Navier.

Application du principe des vitesses virtuelles, aux machines élémentaires qui ont pour objet de transmettre le mouvement circulaire d'un cercle à un autre cercle, situé ou non dans le même plan que le premier; par M. Hachette.

Sur le cas irréductible dans les équations du troisième degré; par M. de Stainville.

Formule pour calculer l'aire d'un triangle sphérique; par M. Puissant.

Questions de mathématiques et de physique, proposées au concours général des lycées de Paris, année 1813.

§. II. SCIENCES PHYSIQUES.

Analyse d'un Mémoire sur l'électricité; par M. Poisson.

Extrait des Rapports faits par MM. Delambre et Cuvier, sur les travaux de la Classe des sciences physique et mathématiques, pendant l'année 1813.

Sur la polarisation de la lumière électrique; par M. Hachette.

Notice historique sur la composition de l'eau.

Problème de physique, proposé par M. Biot.

Projets des prix proposés par la Classe des sciences physique et mathématiques de l'Institut.

§. III. ANNONCE D'OUVRAGES.

Sur les travaux hydrauliques des environs de Paris; des canaux de l'Oure et de la Marne.

Livres publiés par les Elèves ou Professeurs de l'Ecole Polytechnique. — Description de l'Egypte.

Note sur la part qu'ont eue les anciens élèves de l'Ecole Polytechnique au voyage d'Egypte, et à la confection de l'ouvrage qui se publie sur cette contrée.

§. IV. PERSONNEL.

Notice concernant M. Lagrange.

Promotions d'anciens élèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs.

Conseil de perfectionnement, session de 1813 à 1814.

Admission des élèves de l'Ecole Polytechnique en 1813.

Admission dans les services publics.

Fin de la Table.

IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.

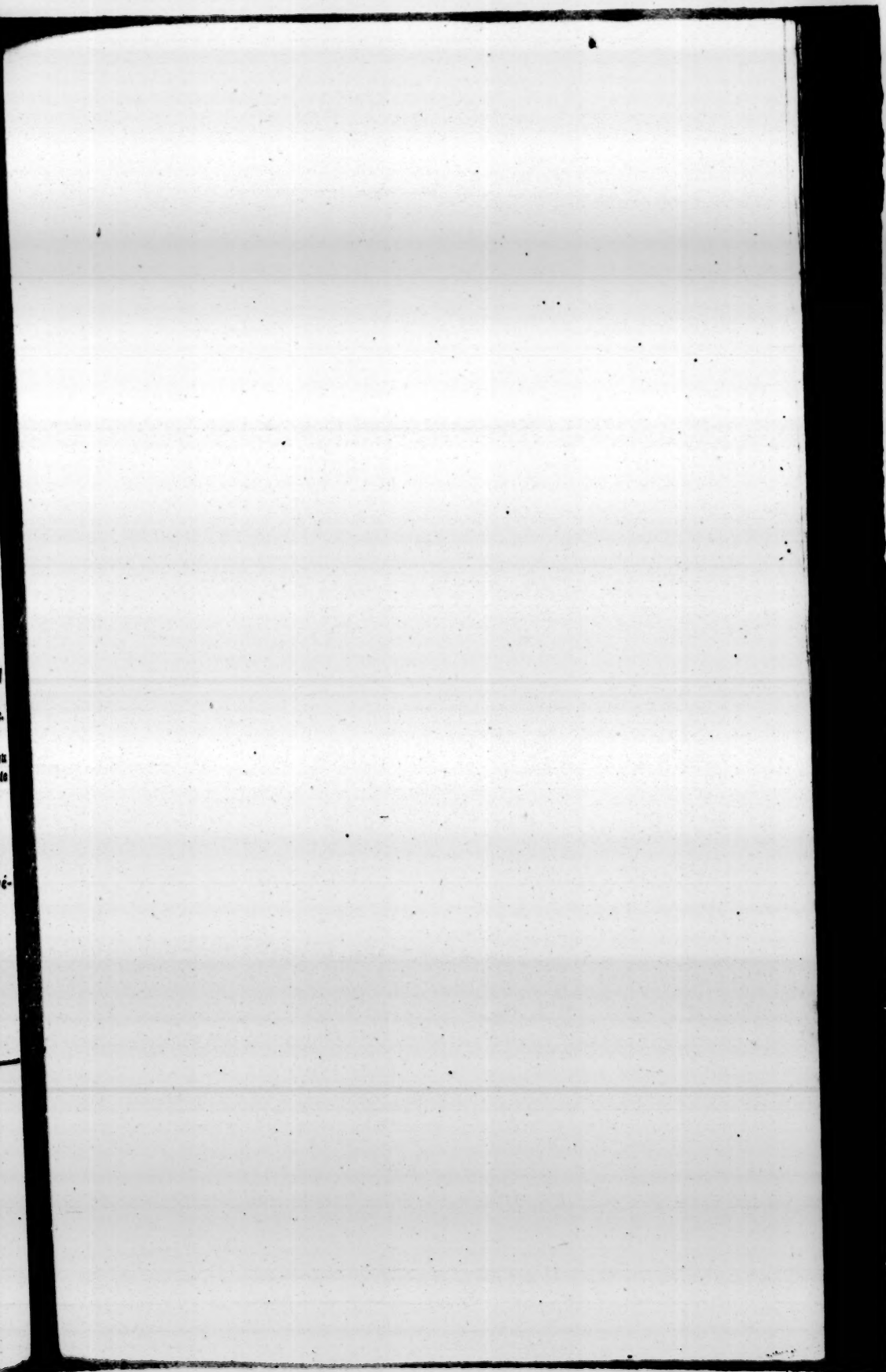


Fig. 4.

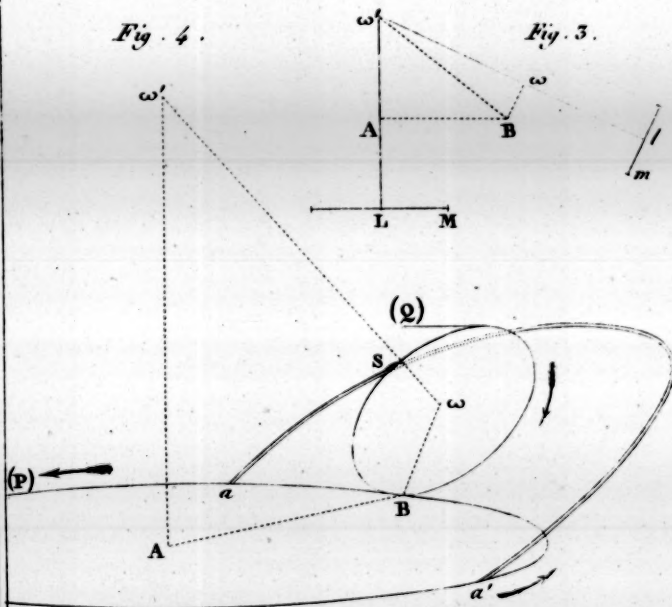


Fig. 3.

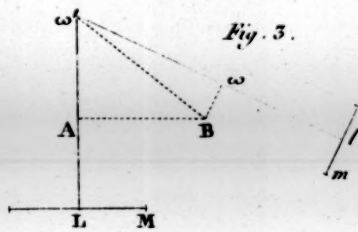
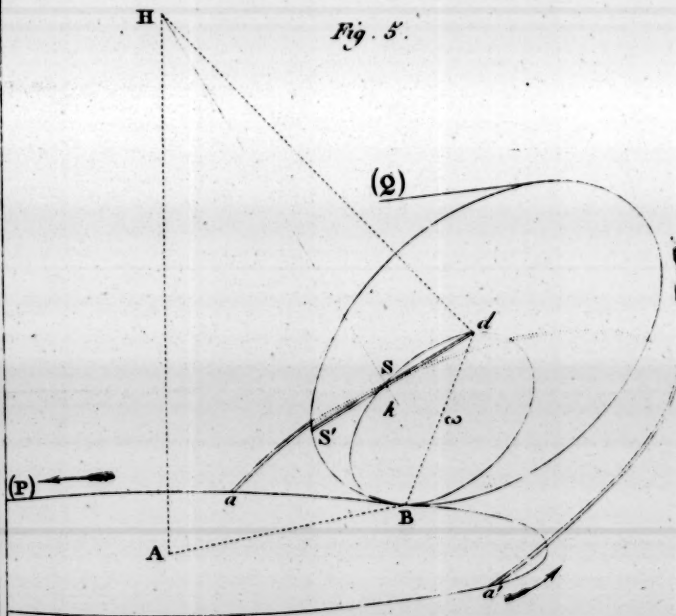


Fig. 5.



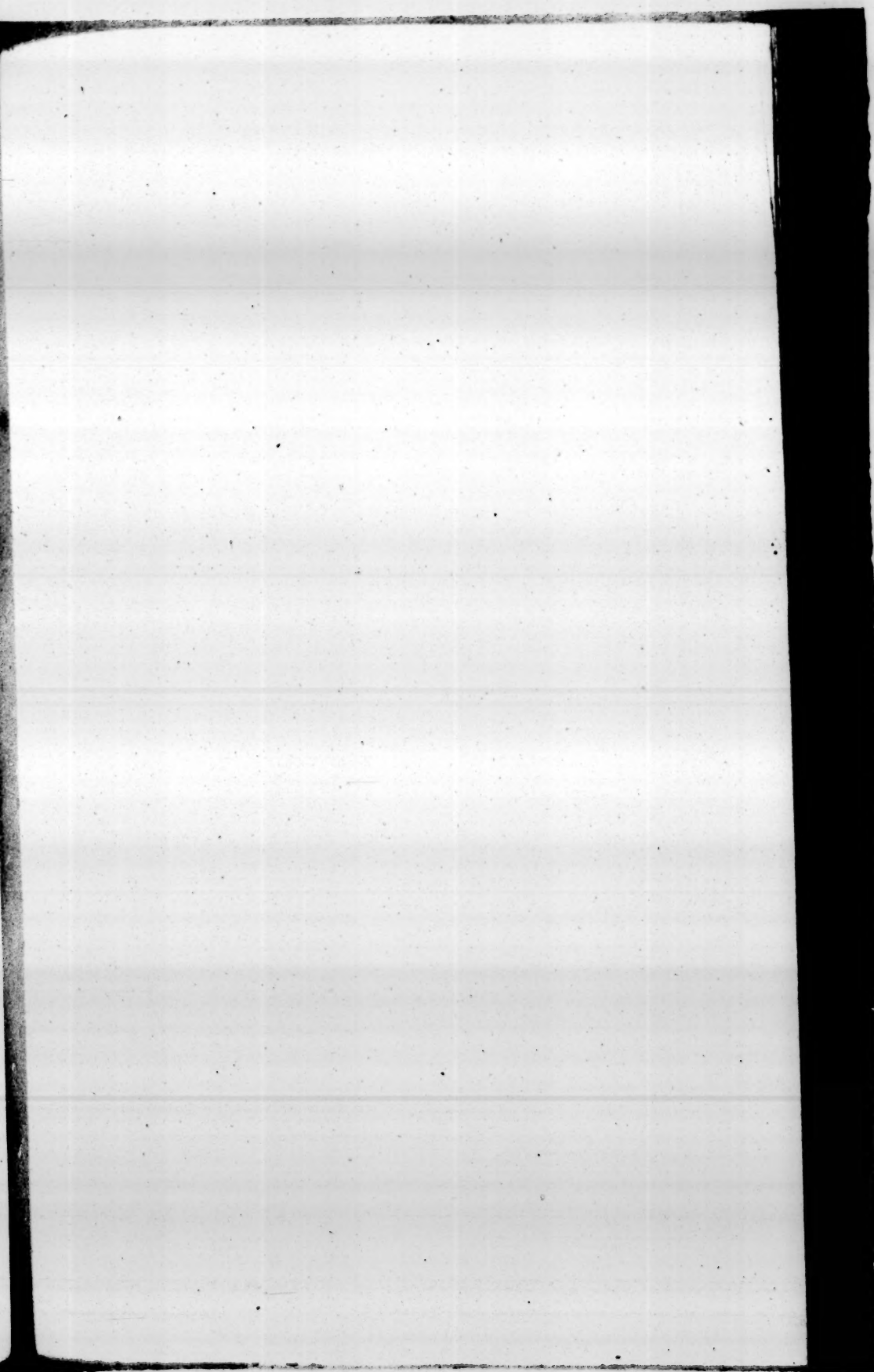


Fig. a.

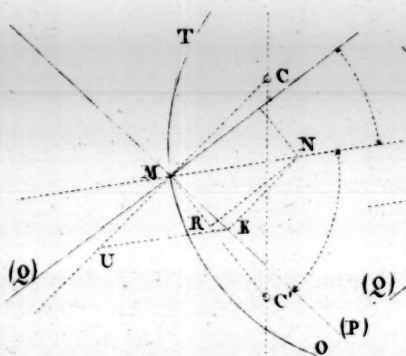


Fig. b.

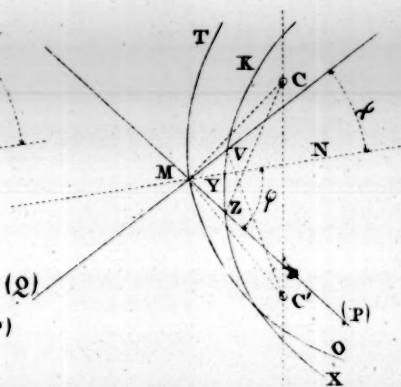


Fig. 1^{re}.

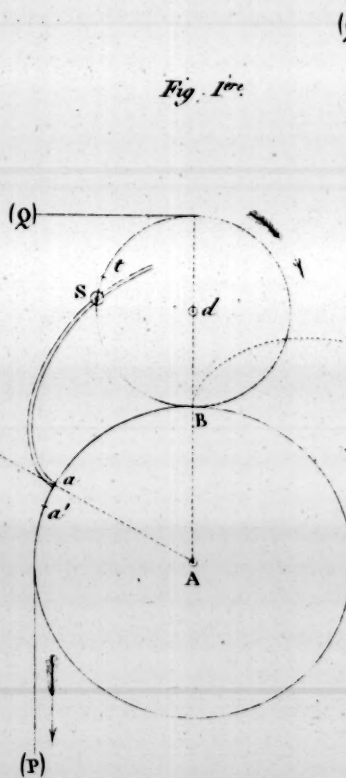
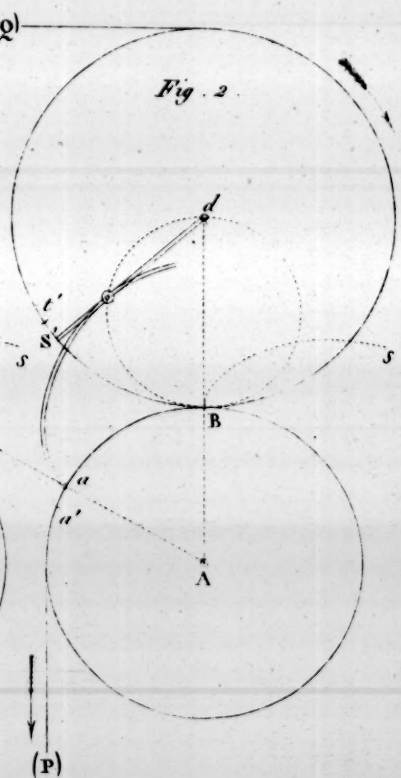
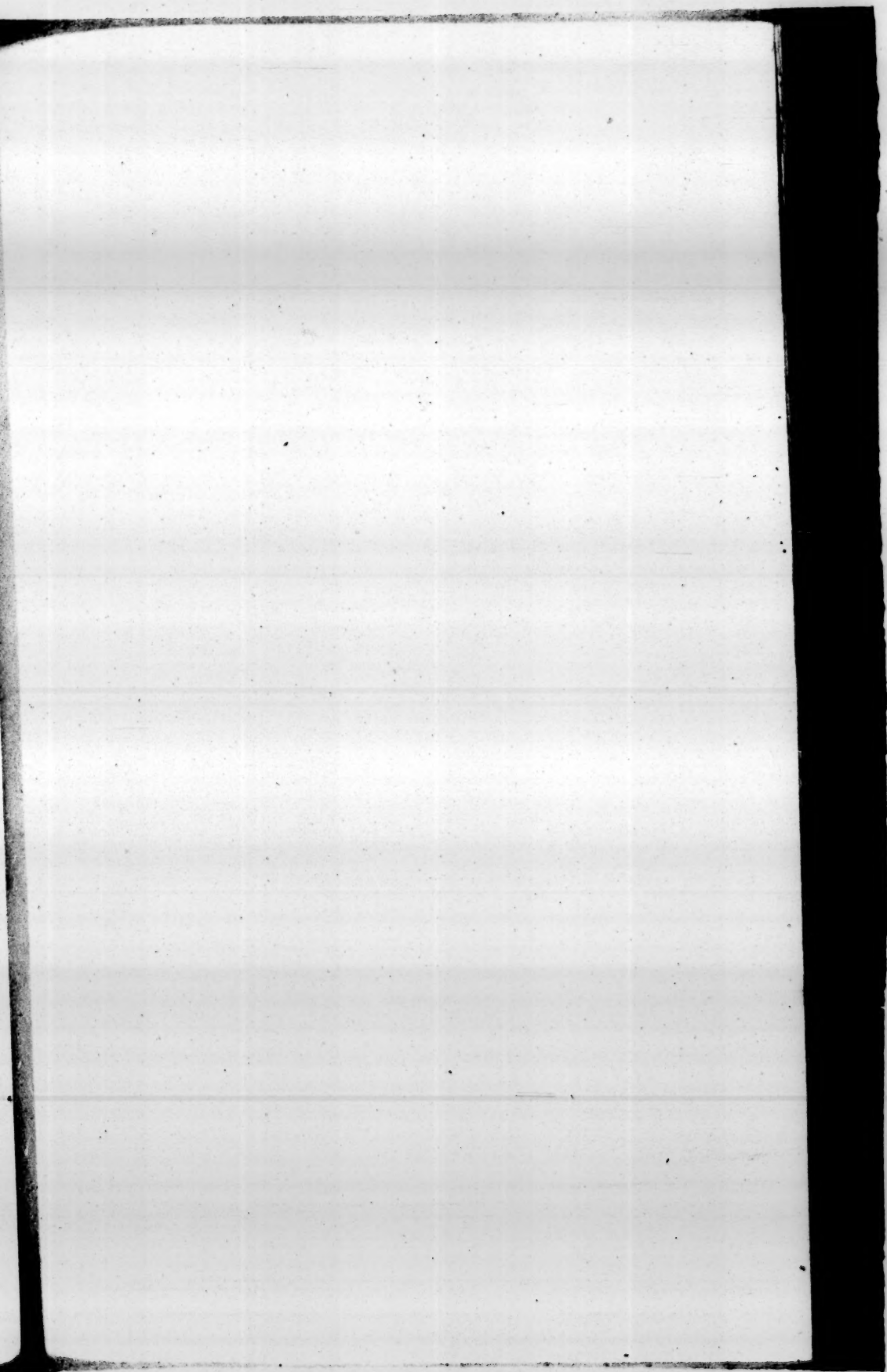
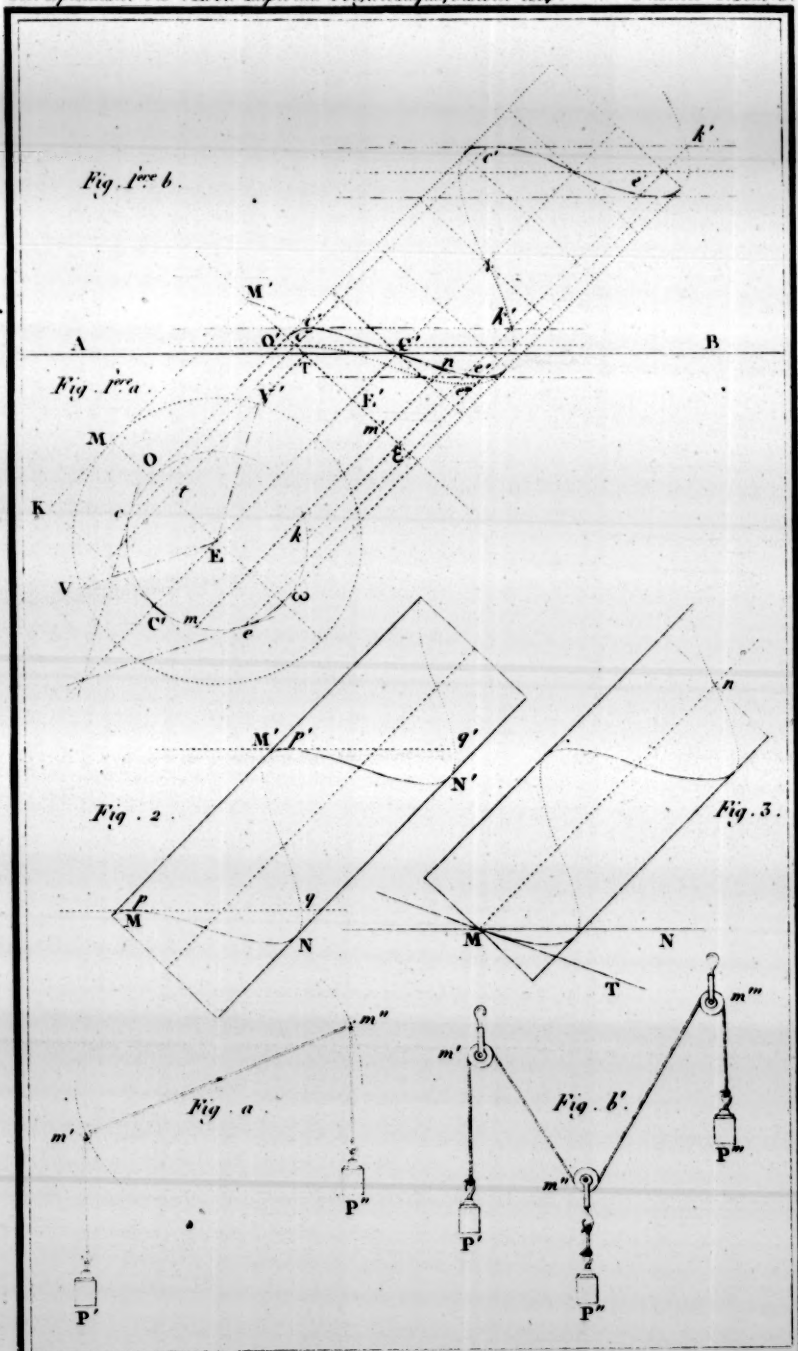
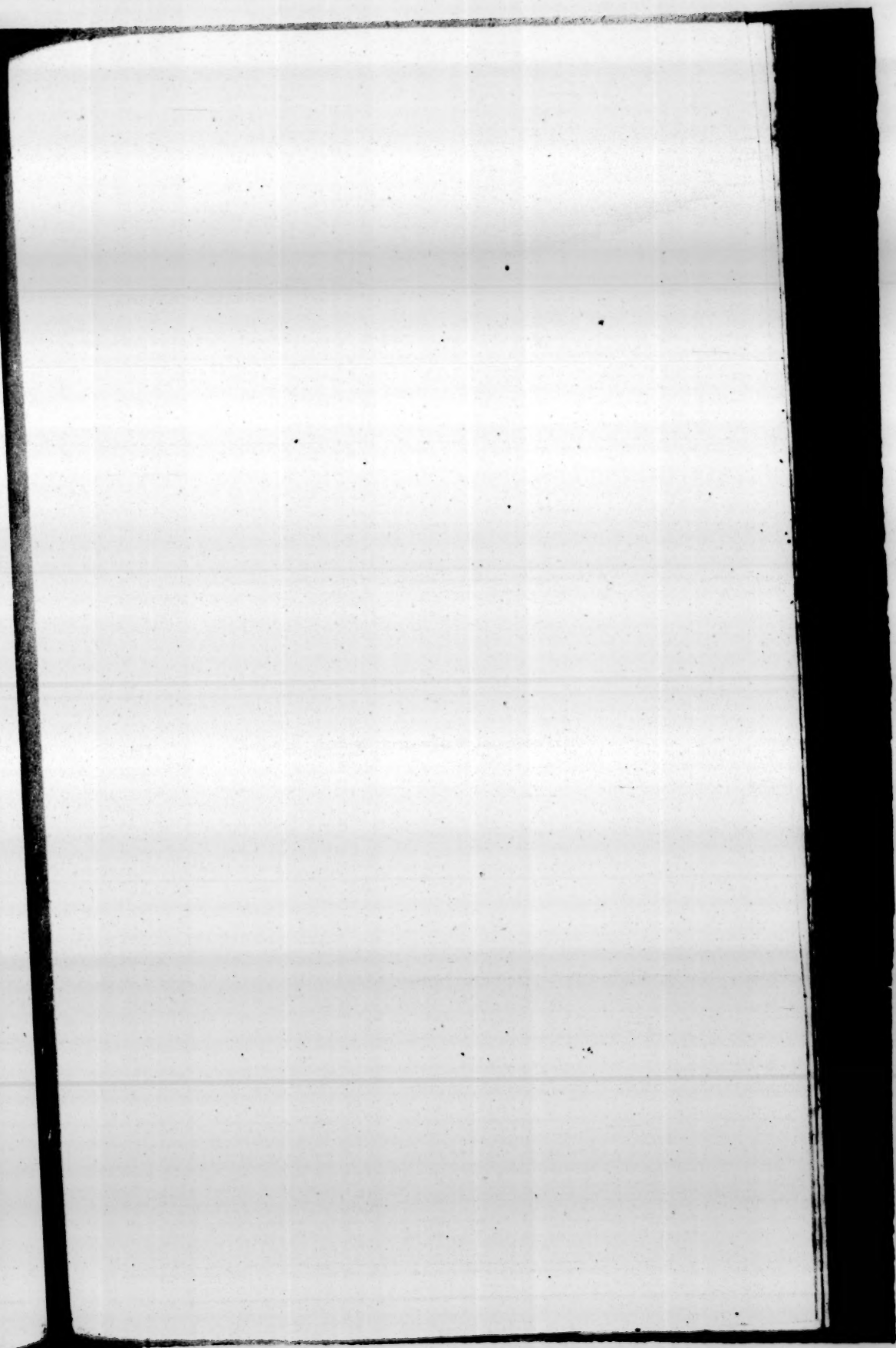


Fig. 2.



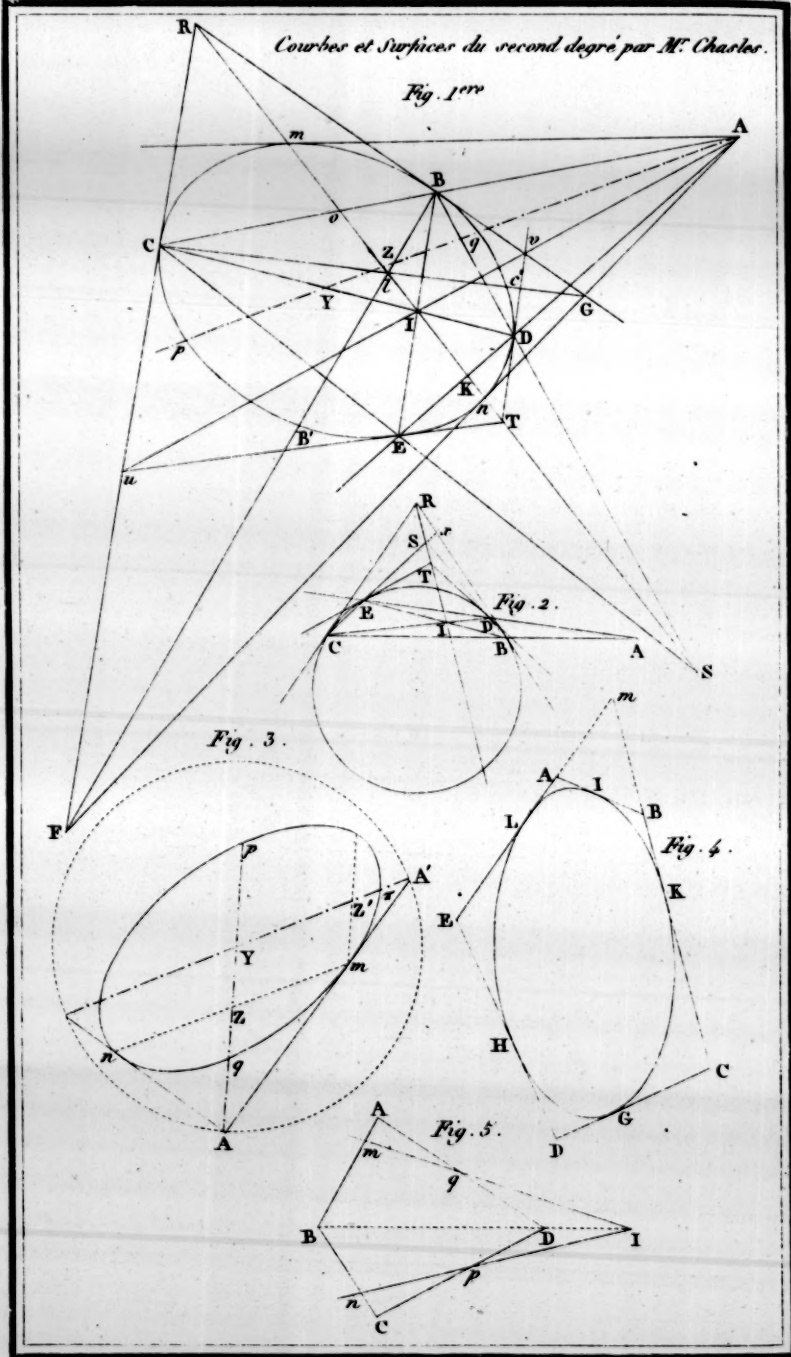






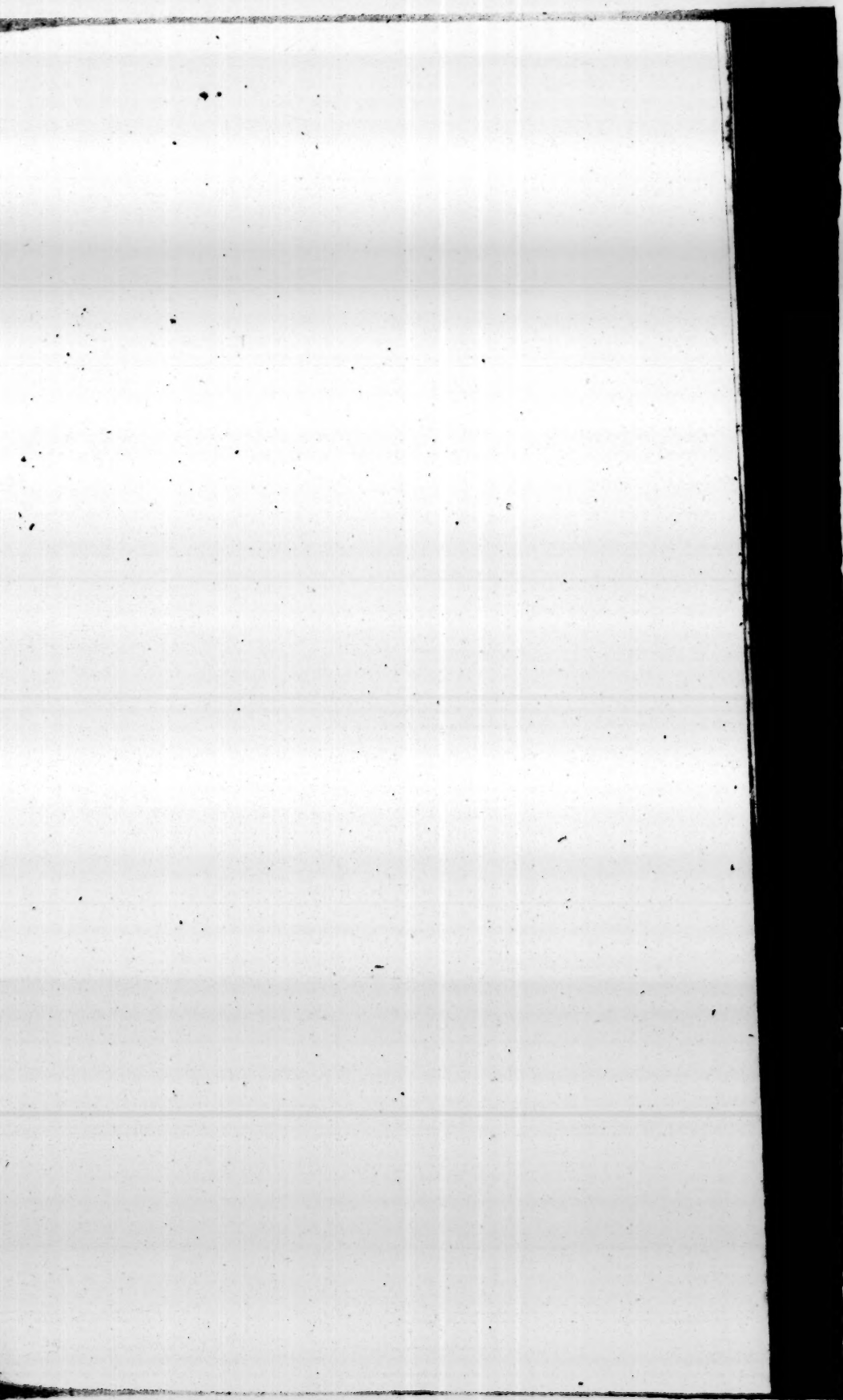
Courbes et Surfaces du second degre par M^r Charles.

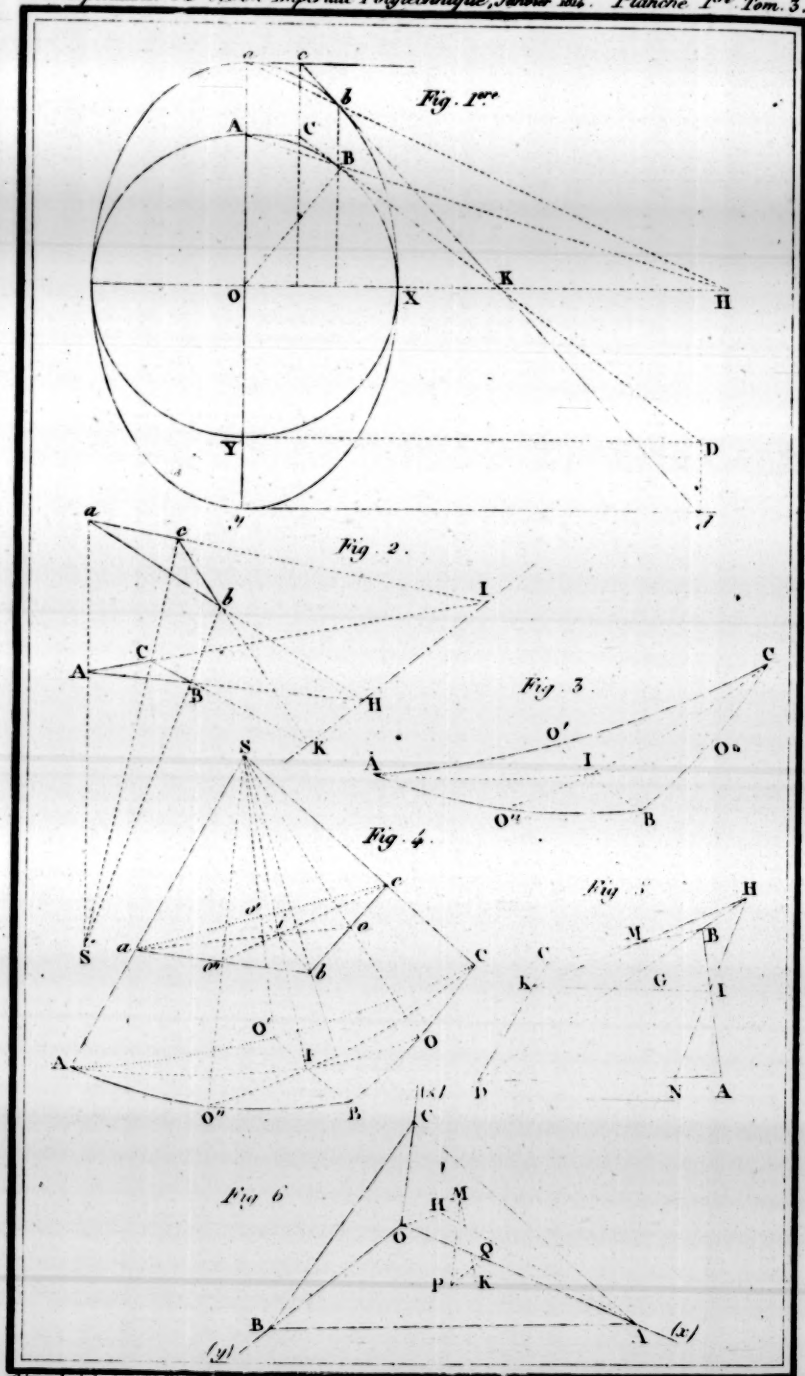
Fig. 1^{re}



Garard del.

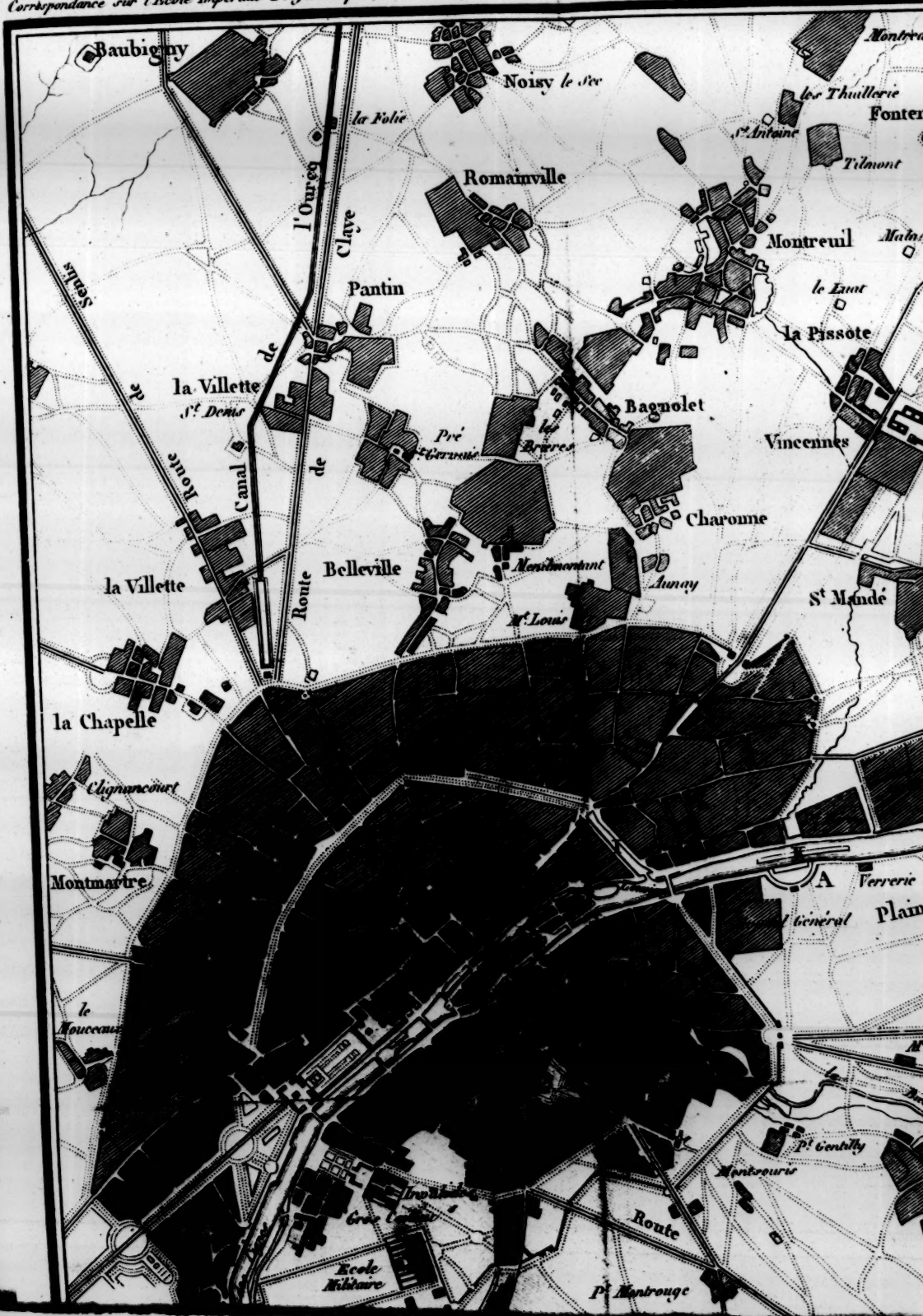
L. Steigay sculp.

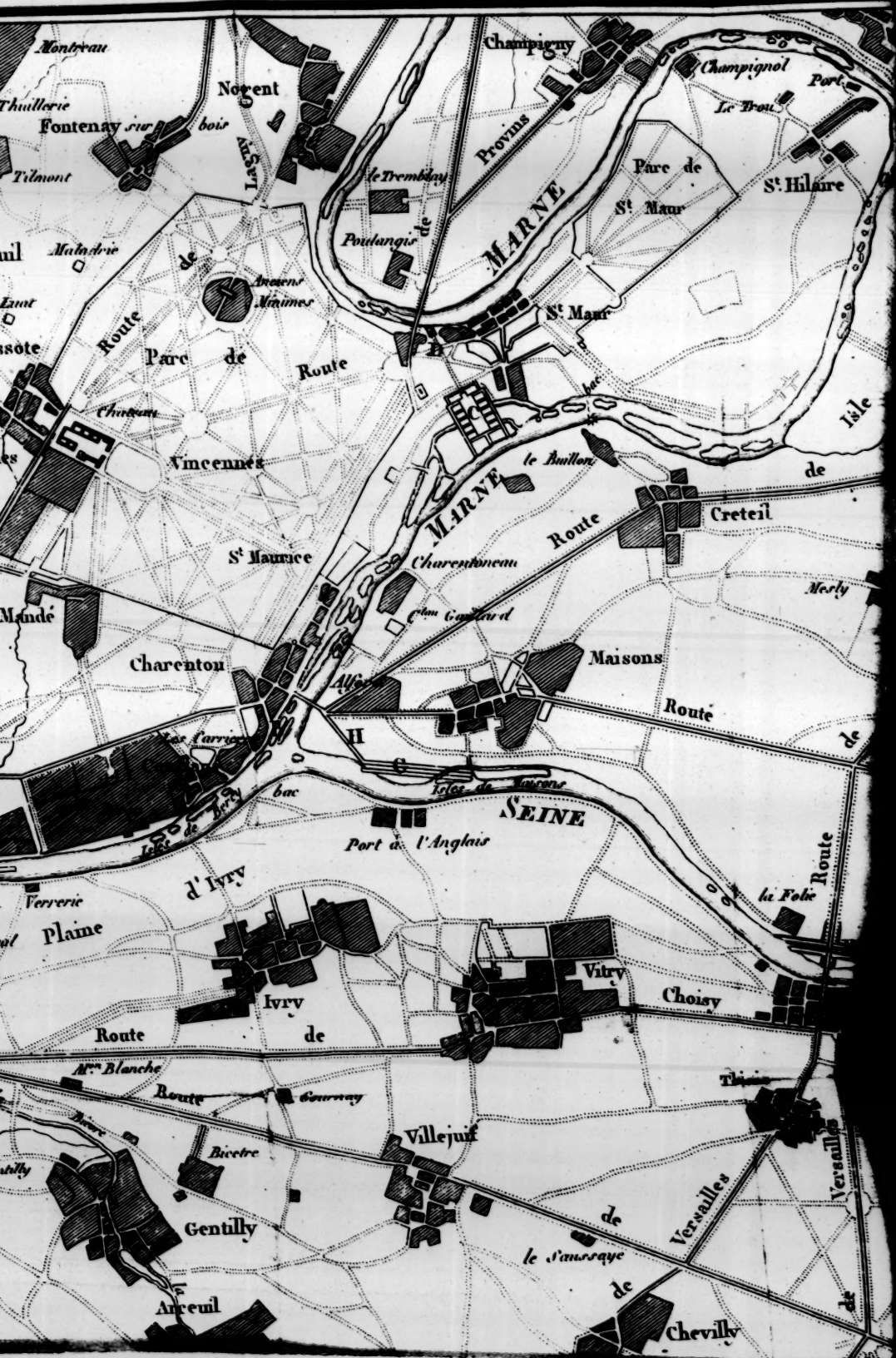


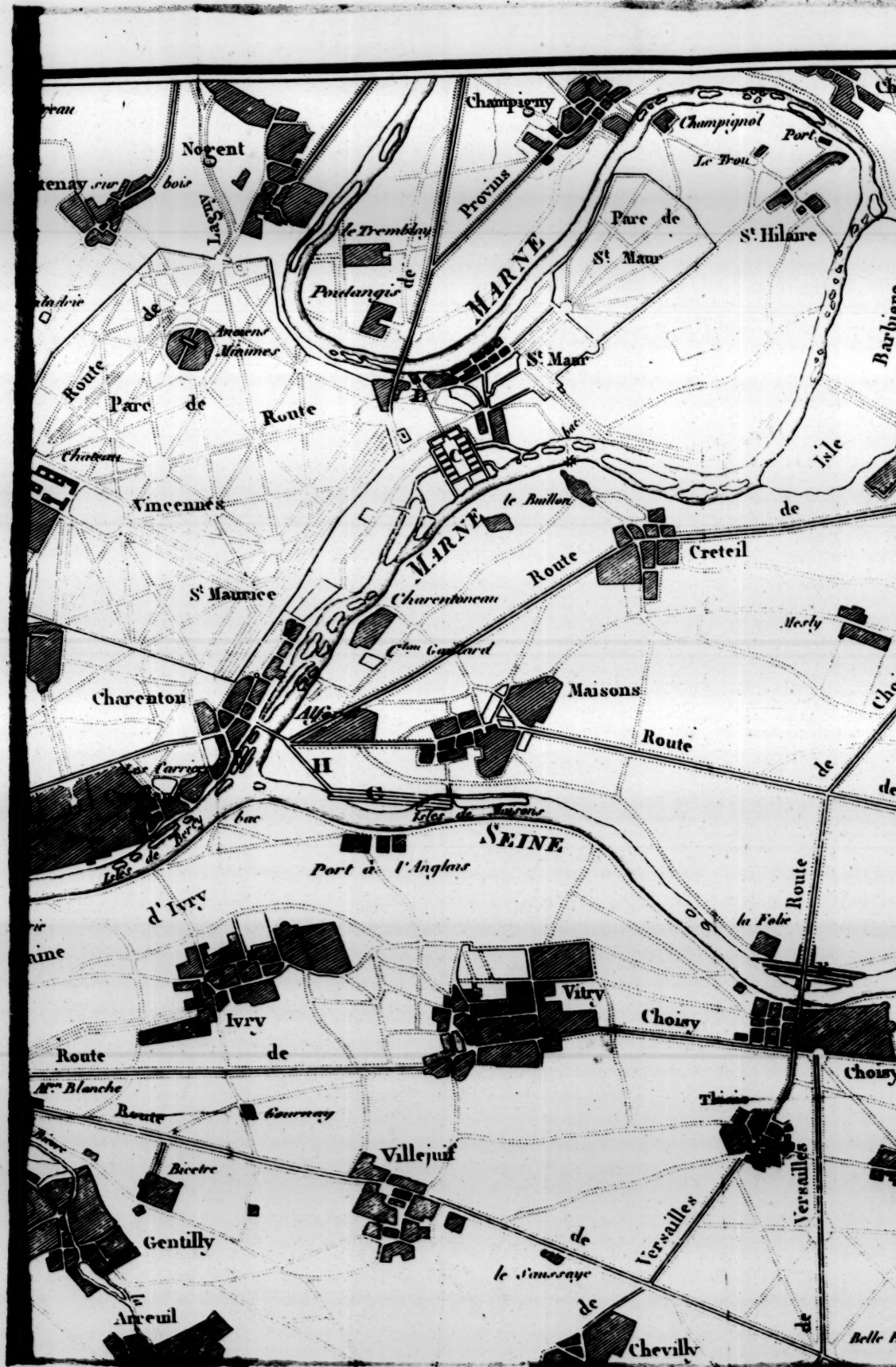


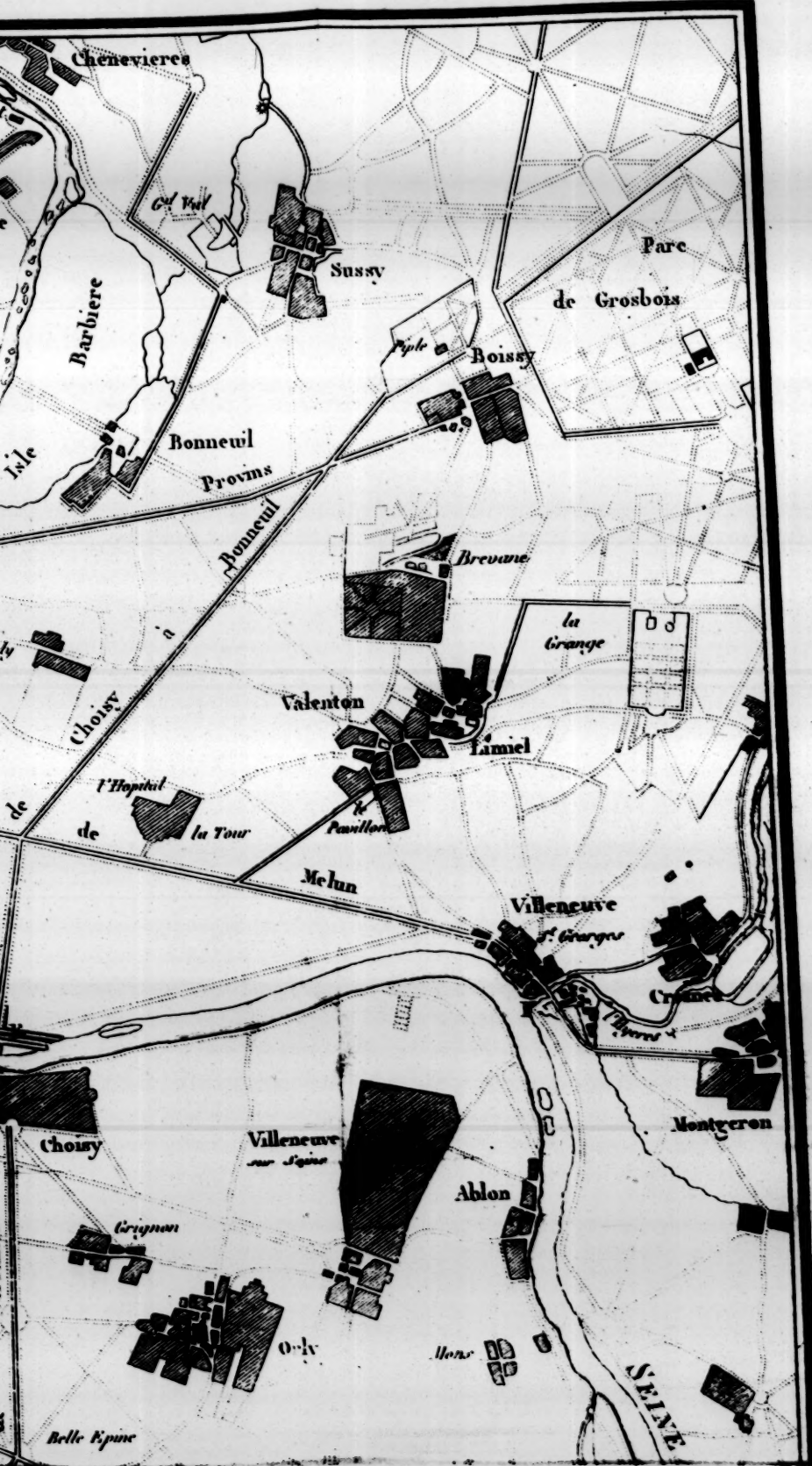
Gerard del.

L. Steingny sculp.

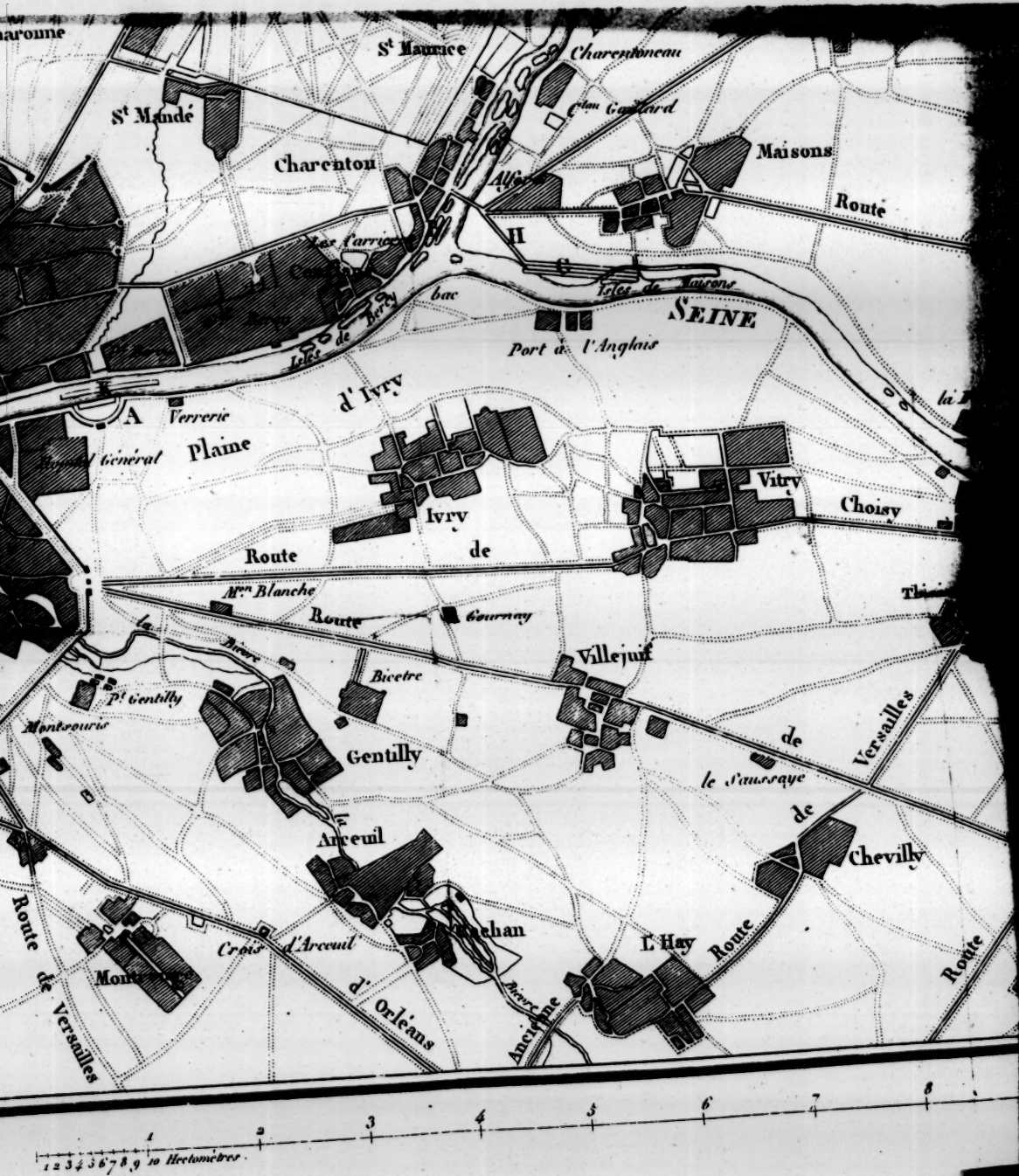


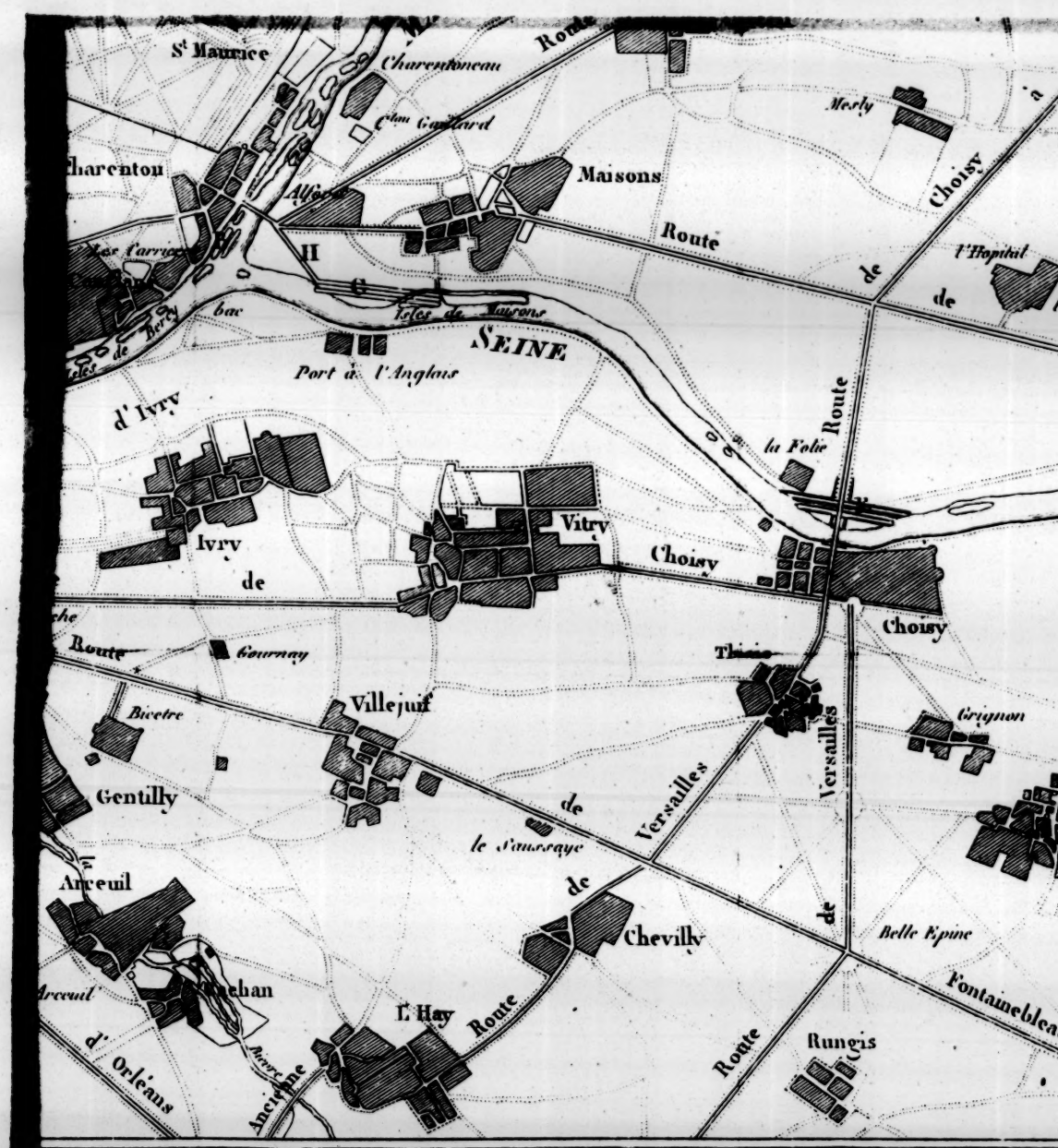




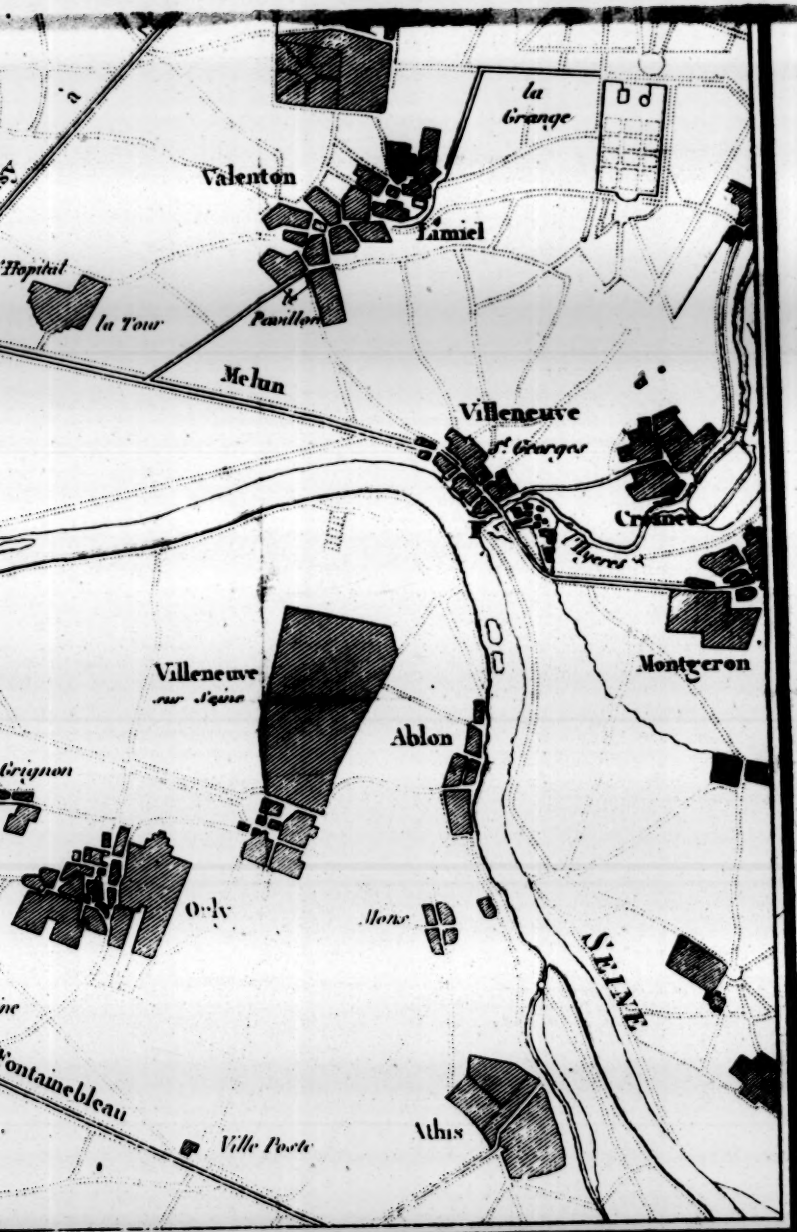








3 4 5 6 7 8 9 10 Kilomètres
1 Myriamètre



kilometres
miles

LIBRARY OF